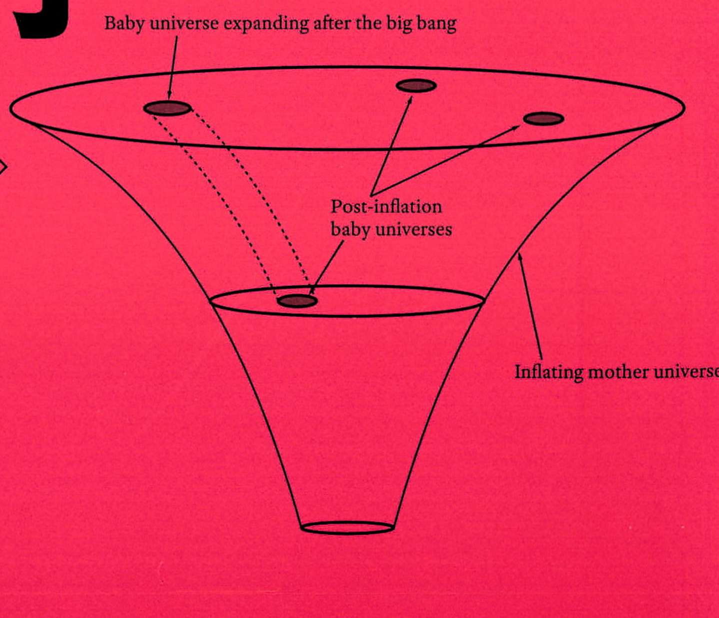
明解

量子宇宙論入門



吉田伸夫 著

Nobuo Yoshida

講談社

明解
量子宇宙論
入門

吉田伸夫◇著◇
Nobuo Yoshida

はじめに

量子宇宙論は，一般相対論と量子場理論を組み合わせて宇宙の全体像を解明することを目的とする学問であり，必ずしも実証されていないさまざまなアイデアが交錯する科学の最先端分野である．

一般相対論に基づくビッグバン宇宙論では，この宇宙がビッグバンと呼ばれる高温状態から膨張してきたことが明らかにされたが，同時に，「そもそもビッグバンはどのようにして起きたか」など，数多くの新たな謎が生まれた．こうした謎を解明することを目指して，1980 年代以降の宇宙論では，それまで素粒子という極微の対象を探究するために用いられていた量子場理論を援用するようになる．その代表的な成果がインフレーション理論であり，宇宙の初期に急激な加速膨張を行う時期があったと主張する．さらに，インフレーション理論の応用として，物質分布の揺らぎが生じる量子論的なメカニズムや，物理定数の異なる宇宙が次々に誕生する可能性について，研究が進められている．

このように，量子宇宙論（ここでは，宇宙全体を量子論的に扱うものだけでなく，量子論の手法を宇宙論に応用する理論をこう呼んでいる）は，斬新な世界観を提示するきわめて興味深い内容を含んでいる．しかし，そこで用いられる物理学理論はかなり難解であり，この分野に関心を持つ人にとって大きな障壁となる．量子宇宙論に関する書物は決して少なくないが，その多くは，数式の全くない一般人向けの解説書か，一般相対論と量子場理論の知識を前提とする大学院学生・研究者向け教科書のいずれかであり，「興味はあるが専門的な知識はない」という学徒にとって，「帯に短したすきに長し」である．そこで，本書では，この 2 つのタイプの隙間を埋めることを目標とした．読者としては，ニュートン力学やマクスウェル電磁気学は一通り学習し，量子論や特殊相対論の初歩も知っているが，一般相対論や量子場理論を本格的に勉強したことのない理工系学部学生を想定している．

本書は，第 I 部から第 IV 部までの 4 つの部分から成る．

第 I 部は全体の準備編であり，一般相対論による宇宙モデルと経路積分法を用いた量子場理論の解説を行う（この部分の記述は，拙著『明解 量子重力理論入門』（講談社）とかなり重複するが，それぞれの本だけを手にする読者に配慮した結果なので，了承

していただきたい）．第 II 部では，インフレーション理論の解説を中心に行う．インフレーションを引き起こす暗黒エネルギーについては，数式のない解説書だけを読んだ人が誤解しやすい話題なので，ネーターの定理を使ってエネルギー保存則の意味をかなり詳しく説明した．第 III 部は，宇宙がどのように始まったかという問いの下に，ホイーラー－ドウィット方程式を用いた宇宙の波動関数や，宇宙全体が周期的に振動する可能性について述べる．第 IV 部では，宇宙がいくつも存在するという並行宇宙のアイデアを，カオス的インフレーション理論を中心に紹介する．

本書を執筆する際に強く意識したのは，科学ががっちりと構築された知の体系ではないという点である．特に，最先端研究の現場では，時には思いつきに近いアイデアが次々と提案され，多くの科学者がさまざまな方向から検討を重ねている．“衆知を集める”研究方法が，科学を実り多い学問にしているのである．したがって，教科書のように１つ１つの式を積み上げていくボトムアップ式の記述は，こうした最先端の状況を伝えるのに不向きである．本書では，しばしば導き方を示さないまま式を掲載するだけにとどめているが，これは，式の導き方を修得するより前に，全体像を眺望することが大切だと考えたからである．教科書や参考書として勉強するためのものではなく，量子宇宙論の全貌を俯瞰（ふかん）的に眺めるためのガイドブックとして，本書を利用していただきたい．

吉田伸夫

目次

第 II 部　加速膨張する宇宙

第III部　宇宙の始まり

第6章　原初的原子からの誕生　119

第7章　振動する宇宙　137

第8章　永遠に生み出される宇宙　161

第IV部　並行宇宙

第9章　物理定数の異なる宇宙　181

第 10 章　マルチバースと人間原理　*202*

第 11 章　多世界解釈　*227*

参考文献　*253*　／　索引　*258*

第 I 部

相対論と量子論

宇宙論とは，宇宙を 1 つの構造体として扱う学問である．しかし，宇宙の構造とは何を意味しており，どうすれば記述できるのだろうか？

ユークリッド幾何学と原子論を信奉していたニュートンの宇宙論は，相対論と量子論を知らずに宇宙を論じることがいかに難しかったかを如実に示している．彼は，友人の聖職者ベントリー宛書簡の中で宇宙全体の構造を取り上げるが，そこで語られるのは，無限に拡がる空間の内部に天体がほぼ一様に分布する状態だった．ニュートンは，ユークリッド幾何学の成り立つ空間を物質から独立した絶対的な枠組みと見なしていたため，空間を限定する何らかの境界——アリストテレスの宇宙論で有限宇宙の境界と見なされた恒星天のようなもの——を設定することができず，無限の拡がりを認めざるを得なかった．さらに，無限の空間のどこかに天体が偏っていると，互いの重力で引き合って凝集してしまうため，天体の分布は一様でなければならないという描像が導かれる．無限で一様という明確な構造のない宇宙の提案である．

ユークリッド幾何学の成り立つ絶対空間を前提とし，物質は空間内部を運動する粒子から成り立っていると考えると，全体として明確な構造を持った宇宙を構想することは難しい．こうして，近代物理学が成立してから 20 世紀初頭までの宇宙論は，せいぜい銀河系のような天体集団を対象とするしかなかった．

宇宙論に新たな光が射し込むのは，相対論と量子論によって物理世界に対する見方が大きく変わってからである．まず，一般相対論は，空間が空虚な入れ物ではなく，幾何学的な性質を備えた物理的実体であることを明らかにした．その結果，宇宙全体の“姿”が明確に記述できるようになり，そのダイナミックな歴史を語ることも可能になった．さらに，量子場理論によって，物質の実態が，空虚な空間の中を動き回る原子ではなく，場の励起状態（真空より高いエネルギーを持つ状態）であることが示された．量子場は空間と一体になって全宇宙に拡がり，宇宙の歴史に影響を与え続けている．

このように，相対論と量子論は，現代的な宇宙論に欠かすことのできない基盤となっている．そこで，本書第 I 部では，この 2 つの理論に関して，宇宙論を記述するのに必要な解説を行うことから始めたい．

第1章

一般相対論に基づく宇宙モデル

空間を空虚な入れ物と考えたのでは，宇宙全体の構造を記述することは難しい．空間とは空虚ではなく重力を伝える媒質だとする一般相対論の立場に立って，初めてこの困難が乗り越えられる．一般相対論では，空間は幾何学的な性質を備えた実体として扱われるため，空間の“形”を考え，宇宙全体の構造を空間の幾何学によって表すことが可能になる．

宇宙全体を幾何学的構造体として表すことにためらいを感じる宇宙論研究者も，少なくない．その理由は，現在の観測データでは，空間の曲率がゼロと異なるかどうかすら決定されておらず，平坦な空間が無限に拡がっていると見なすことも許されるからである．このため，多くの宇宙論の教科書では，全体の構造については明確に記述せず，いくつかの可能性を含んだ一般的なモデルを紹介するに留まっている．しかし，本書では，宇宙全体の構造に関して明確なイメージを抱くことが宇宙論を理解する第1歩だという考えに基づいて，球面という幾何学的構造を持つケースを中心に話を進めることにする．

1-1節　一般相対論の基礎

宇宙モデルの話に入る前に，一般相対論についての簡単な解説を行おう．アインシュタインは，空間と時間を結びつける特殊相対論を拡張する試みとして一般相対論を作っていったが，ここでは，一般相対論の持つ幾何学的な側面を強調するために，まず空間だけを対象とするリーマン幾何学の議論から始め，その後で時間と空間を統合する特殊相対論に言及する．一般相対論に関する基礎知識のある読者は，1-2節に飛んでかまわない．

§1-1-1　リーマン幾何学

一般相対論における空間とは，そこで物理現象が生じる場であり，幾何学的な性質を備えた実体である．こうした空間の性質を記述するのに利用されるのが，**リーマン幾何学**である．

もっとも，3 次元空間を頭の中で思い描こうとすると，どうしても何もない空っぽの入れ物をイメージしてしまう．そこで，3 次元を考える前の段階として，次元数を 1 つ下げ，2 次元の空間で説明することにしよう．2 次元の空間は面なので，3 次元ユークリッド空間の中に曲がった面状の空間が存在する状況を思い描くことができる．物理現象はこの面の上で生じ，面に沿って伝わっていく過程と見なされる．

平坦な 3 次元空間に相当する 2 次元面は，凹凸や曲がった箇所のない平面である．しかし，3 次元空間に埋め込んで考えれば，平面以外にも，さまざまな曲面（尖端や縁の存在しない滑らかな面に限る）をイメージすることができる．こうした曲面の幾何学を，座標を使って記述してみよう．

平面ならば，直交座標系によって面上の位置を表すのが自然だが，一般の曲面の場合，特に自然な座標系というものはない．そこで，伸縮自在のゴムシートでできた方眼紙をペタリと貼り付けることで，面上の座標系を定義することにしよう．ゴムシートのどこをどう伸び縮みさせて貼り付けるかによって，座標軸が曲線になるような座標系（曲線座標系）が無数に定義できるが，もともと曲面に備わっている幾何学的性質は，こうした座標系の選び方には依存しないはずである．

曲線座標系の 1 つを，座標変数 x と y で表すことにしよう．x と y は，他の任意の座標系の座標変数 x' および y' と，何らかの関数で結びつけられる．

$$x = f\left(x', y'\right), \qquad y = g\left(x', y'\right) \tag{1.1}$$

曲面に尖端や縁がなく，折り曲げたり破ったりせずに方眼紙を貼り付けられるならば，f と g のような変数変換の関数は，微分可能になる．このようなケースに限れば，幾何学的な議論を行う際に，微分を利用することができる．こうして作られたのが**微分幾何学**である．リーマン幾何学は，微分幾何学の 1 分野である．

2 次元の面上で近接した 2 点間の間隔を，微小な長さを表す量（**長さ要素**）として dl と書くことにしよう．dl は，幾何学的な性質から独立した物理的な測定器――例えば，一定の原子間隔を持つ結晶でできた物差し――を使って計測可能だとする．座標の目盛りの間隔は座標系ごとに異なるので，dl が座標の微小な間隔 dx や dy とどのような関係にあるか，すぐにはわからない．しかし，dl は物理的に決定されるのだから，座標系によらず同じ値を取るはずである．言い換えれば，dl は座標変換に対する不変量であ

る．こうした不変量は，**スカラー**と呼ばれる．

平面上の直交座標系では，ピタゴラスの定理が成り立つので，座標の 1 目盛を長さの単位と一致させると，dl の平方は次の式で与えられる．

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

曲面上の座標系になると，必ずしも座標軸が直交しておらず，目盛りの間隔も場所によって異なるので，より一般的な次の関係式になる．

$$dl^2 = E\,(x,y)\,dx^2 + 2F\,(x,y)\,dxdy + G\,(x,y)\,dy^2 \tag{1.2}$$

ここで，微分を考える際の一般論に基づいて，高次項は無視した．滑らかな曲面の場合，E, F, G は微分可能な関数となる．

曲面の幾何学を議論する場合，通常は，3 次元ユークリッド空間に埋め込んだ曲面を“外側”から眺めることで，幾何学的な量を定義する．曲面の曲率（ガウス曲率と呼ばれるもの）ならば，ある点での接平面を与え，曲面から接平面までの距離に基づいて定義するのが一般的である．ところが，こうして 3 次元ユークリッド空間内部で定義された曲率の式を調べると，接平面などに関する項は全て打ち消しあい，(1.2) 式に現れる E, F, G の微分をある形に組み合わせたものだけで表されることがわかった．この性質を数学的な定理として定式化したのが，ガウスのいわゆる「驚異の定理」である．

「驚異の定理」は，曲面の幾何学を根本から考え直すきっかけになった．曲率が曲面上の座標に関する (1.2) 式の係数だけで表されるのだから，2 次元曲面の幾何学を論じるのに，わざわざ 3 次元の空間を想定して，その中に曲面を埋め込む必要はない．曲面の幾何学は，2 次元幾何学の体系として閉じていることになる．

さらに，もう 1 つの帰結が導かれる．平面ならば直交座標系を選ぶのが自然だが，一般の曲面上では，座標の選び方についての原則はなく，(1.1) 式のように，互いに滑らかな関数を使って変換できるさまざまな座標系が考えられる．こうした座標系のどれを選んでも，(1.2) 式と同じ形式で長さの要素 dl を定義でき，その係数の微分をある形に組み合わせて曲率が表されるという「驚異の定理」が成り立つ．つまり，曲率のような幾何学的な性質を表す量は，座標系の選び方によらず形式が不変な式で表されるわけである．

こうした性質は，実は 2 次元曲面に限らない．上のような議論を一般の次元に拡張したものが，リーマン幾何学である．n 次元の場合，座標を x の右肩に 1 から n までの数字を付した変数で表すことにすると，(1.2) 式の長さ要素 dl は，次のように書くことができる．

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji}) \tag{1.3}$$

g_{ij} は，(1.2) 式の E, F, G を n 次元の場合に一般化した係数で，長さを決定する量であることから，**計量テンソル**と呼ばれる．

テンソルとは，n 次元では 1 から n まで動く添字（上の i や j）を持つ量で，添字が m 個のテンソルは，m 階のテンソルと呼ばれる．(1.3) 式の計量テンソルは，添字が i と j の 2 個あるので，2 階のテンソルである．1 階のテンソルは，特に**ベクトル**と呼ばれる（スカラーを階数 0 のテンソルと見なすこともできる）．

テンソルであるためには，単に添字を持つだけでなく，座標変換を行ったときの応答が一定の法則に従うことが必要である．座標の変数変換が，次のように表されるものとしよう．

$$dx'^i = \sum_{j=1}^{n} \Lambda^i_j dx^j$$

座標変換に対するテンソルの応答がこれと同じ係数で表されるならば，このテンソルを**反変テンソル**と呼び，添字を右上に付けて表記する．

$$T'^{ij\cdots k} = \sum_{a,b,\cdots c=1}^{n} \Lambda^i_a \Lambda^j_b \cdots \Lambda^k_c T^{ab\cdots c}$$

一方，座標変換の係数と逆行列となる係数で変換されるテンソルは**共変テンソル**と呼び，添字を右下に付ける．

$$T'_{ij\cdots k} = \sum_{a,b,\cdots c=1}^{n} \left(\Lambda^{-1}\right)^a_i \left(\Lambda^{-1}\right)^b_j \cdots \left(\Lambda^{-1}\right)^c_k T_{ab\cdots c}$$

反変・共変テンソルが混じったものが**混合テンソル**で，上下両方に添字が付く．

(1.3) 式の g_{ij} が 2 階の共変テンソルならば，座標変換したときの変換係数が座標の微分から出るものと打ち消しあうので，dl は座標変換によって値が変わらないスカラーとなる．

リーマン幾何学に現れる式には添字がたくさん付くので，いちいち総和記号を付けて表すのは面倒である．そこで，上と下に同じ添字が現れたときには，次元数の範囲で足し上げるといういわゆる「**和の規約**」を採用する．添字を足し上げることを「添字を**縮約**する」という．

$$A^{\cdots}_{i\cdots}B^{i\cdots}_{\cdots} \equiv \sum_{i=1}^{n} A^{\cdots}_{i\cdots}B^{i\cdots}_{\cdots}$$

さて，「驚異の定理」を一般化すると，曲率のような幾何学的な量は，g_{ij} を使って表されることになる．曲率の式を導くのは数学的にかなり高度になるので，詳しい説明は一般相対論やリーマン幾何学の教科書に譲ることにして，ここでは，導出方法は示さずに，曲率の一種である**リッチテンソル**がどのような式で表されるかを記しておく．

$$R_{ij} = \left(\partial_i \Gamma^k_{jk} - \partial_k \Gamma^k_{ij}\right) + \left(\Gamma^k_{ih}\Gamma^h_{jk} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^h_{kh}\right) \tag{1.4}$$

ただし，Γ^k_{ij} はクリストッフェル記号と呼ばれるもので，

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij}\right) \tag{1.5}$$

という形で定義される．また，右上に添字の付いた g^{ij} は，g_{ij} を行列と見なしたときの逆行列に相当し，

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \qquad \left(i = j \text{ のとき } \delta^i_j = 1,\ i \neq j \text{ のとき } \delta^i_j = 0\right)$$

となる．式の表記に当たっては，

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$$

のように略記した．上下で同じ記号が現れるときには，1 から n まで足し上げるという和の規約を使っている．

リッチテンソルを曲率の一種と書いたが，どの方向にどの程度の割合で曲がっているかという情報を表すために，スカラーではなく座標に依存するテンソルとなっている．スカラーとなる曲率を得るためには，リッチテンソルと計量テンソルの添字を縮約すれば良い．

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{1.6}$$

ここで定義された R は，添字を持たないスカラー量となるので，**スカラー曲率**と呼ばれる．

(1.4) 式と (1.5) 式から，ある空間が持つ曲率が，その空間内部で定義される計量テンソルとその微分だけで表され，曲がり方を“外側”から眺める必要がないことがわかる．

【例】2次元球面の場合　式ばかりではわかりにくいので，2次元球面のケースを例にして説明しよう（以下の議論は，後に3次元の球面状宇宙を考察するときに役に立つ）．

まず，イメージを描きやすくするために，2次元球面を3次元ユークリッド空間に埋め込んで考えることから始める．3次元の直交座標を x, y, w とすると，原点を中心とする半径 a の2次元球面は，次の式で与えられる．

$$x^2 + y^2 + w^2 = a^2 \tag{1.7}$$

3次元空間の位置を表すには，x, y, w の3つの座標が必要だが，2次元球面上に限定すれば，x, y 座標を球面上に投影した座標系で位置を決定できる（混乱を避けるために，$w > 0$ の半球に限る）．2次元球面上の長さ要素 dl は，3次元ユークリッド空間での長さ要素と等しいので，次のようになる．

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dw^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

ここで，(1.7) 式の微分から得られる関係式

$$xdx + ydy + wdw = 0$$

を利用した（図1-1）．

(1.8) 式から求められる計量テンソルを2行2列の行列の形で表すと，次のようになる．

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{a^2 - (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

この式からリッチテンソルを求めることができる．と言っても，一般の場合を計算すると煩雑になるので，球面上の座標原点 $x = y = 0$（$w = a$）で計算してみよう．原点では，計量テンソルとその微分は，次のようになる．

$$g_{ij}(0) = g^{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad \left(i = j \text{ のとき } \delta_{ij} = 1,\ i \neq j \text{ のとき } \delta_{ij} = 0\right)$$

$$\partial_k g_{ij}(0) = 0$$

$$\partial_1 \partial_1 g_{11}(0) = \partial_2 \partial_2 g_{22}(0) = \frac{2}{a^2}$$

$$\partial_1 \partial_2 g_{12}(0) = \left(1 \text{ と } 2 \text{ を入れ替えたもの}\right) = \frac{1}{a^2}$$

これ以外の2階微分は0

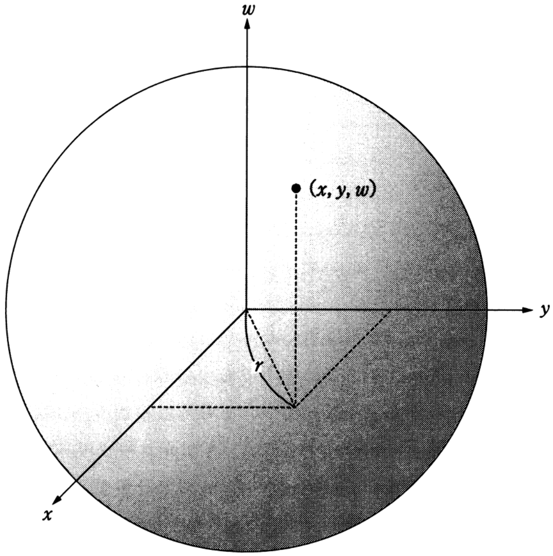


図 1-1　3 次元空間に埋め込まれた 2 次元球面

計量テンソルの後ろに付けた (0) は，値を原点で評価したことを意味する．

これを (1.5) 式に代入すればすぐにわかるように，クリストッフェル記号は原点では全ての成分がゼロとなり，リッチテンソルに寄与するのは，クリストッフェル記号の 1 階微分（計量テンソルの 2 階微分）が含まれる項だけである．添字を間違えないように慎重にしさえすれば，(1.4) 式から原点でのリッチテンソルを計算することは，それほど難しくない．例えば，R_{11} は次のようにして計算できる（和の規約を用いずに，総和記号をあらわに記す）．

$$\begin{aligned} R_{11}(0) &= \sum_{k=1}^{2}\left(\partial_1 \Gamma^k_{1k}(0) - \partial_k \Gamma^k_{11}(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_1 \sum_{k=1}^{2}\left(\partial_1 g_{1k}(0) + \partial_1 g_{k1}(0) - \partial_k g_{11}(0)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\partial_k\left(\partial_1 g_{1k}(0) + \partial_1 g_{k1}(0) - \partial_k g_{11}(0)\right) \\ &= -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

同様にして，リッチテンソルの他の成分も求められる．

$$R_{22}(0) = -\frac{1}{a^2}, \qquad R_{12}(0) = R_{21}(0) = 0$$

原点におけるリッチテンソルの絶対値は，球面半径の 2 乗の逆数になっており，原点から見たそれぞれの座標軸方向の曲率を表していることがわかる（この値はガウス曲率と等しい）．また，2 つの対角成分は等しく，非対角成分はゼロになっており，曲面の曲がり方が等方的であることが示される．さらに，スカラー曲率 R は，

$$R(0) = R_{11}(0) + R_{22}(0) = -\frac{2}{a^2}$$

となる．x, y, w の座標軸をどの方向に選んでも (1.7)〜(1.9) 式はそのままの形で成立するので，スカラー曲率 R は球面上のどの場所でも上の値と等しくなる．

さて，改めて 3 次元空間への埋め込みについて考えてみよう．2 次元球面の曲率を計算するとき，x, y, w という 3 つの座標軸を考え，3 次元ユークリッド空間での球の面を表す (1.7) 式から出発した．しかし，ひとたび (1.9) 式で計量テンソルを与えると，それ以降の計算には，考えている 2 次元の面が 3 次元空間に埋め込まれているという条件は，どこにも使われていない．2 次元の計量テンソルが与えられれば，そこから 2 次元の曲率が求められるのである．最初に導入した 3 次元空間は，あくまでイメージしやすくするための仮想的なものであって，3 番目の座標軸は現実には存在しないと考えても何の支障もない．計量テンソルが (1.9) 式の形で与えられるならば，それだけで球面状と言ってかまわない．

この考え方は，一般相対論にもそのまま当てはまる．一般相対論で宇宙モデルを論じる際に，宇宙の外側に拡がりがあるような図を描くことがあるが，これは単にイメージしやすいようにイラスト化したにすぎない．宇宙空間の幾何学は既知の 3 次元の空間（および 1 次元の時間）の中で閉じており，その“外側”を仮定する必要はないのである．

§1-1-2　4 次元幾何学

ここまでは空間に関する議論だったが，それだけでは，まだ物理学理論を構築できない．時間と空間の関係を明らかにして，初めて物理と結びつけることができる．

時間と空間が異質の次元ではなく，**時空多様体**という 1 つの統一体を構成していることは，特殊相対論の研究を通じて明らかになった．このことを最初に指摘したのが，ポアンカレとアインシュタインの発案になる**相対性原理**を幾何学的に解釈し直したミンコフスキである．

相対性原理とは，外部から作用の加わっていない孤立したシステムでは，静止と等速度運動が原理的に区別できないというものである．最もわかりやすいのが，周囲に何も

ない無重力の宇宙空間に漂っているケースであり，自分が静止しているのか，慣性の法則に従って一定の速度で動いているのか，物理的にはいかなる方法でも判定できない．これは，宇宙空間に散らばる数多くの銀河についても当てはまる．銀河たちは（1-3 節で述べる空間全体の膨張とは別に）それぞれ固有の運動をしており，われわれの住む天の川銀河もアンドロメダ銀河に接近しつつあるが，どの銀河が静止しどの銀河が動いているかは決められない．

しかし，静止と等速度運動が区別できないとは，何を意味しているのだろうか？

時間座標と空間座標を直交させたデカルト座標で眺めていると，1 つのアイデアが思い浮かぶ．デカルト座標系では，静止は時間軸に平行な直線，等速度運動は傾いた直線で表される．両者が区別できないとは，座標系を回転させて時間軸を傾けても，物理的に何の変化も起きないということではないか？　だが，このアイデアが誤りであることは，すぐにわかる．時間と空間がユークリッド幾何学の回転と同じような回転操作で結びついているのならば，日常生活でも時間方向と空間方向が同じように見えてしまうはずである．時間と空間の間に物理的な差異を与えながら，2 つの座標を混ぜ合わせるように回転させる方法はないのだろうか？

ミンコフスキが注目したのは，回転の不変量である．ユークリッド幾何学では，空間的な長さが回転の不変量となる．2 つの直交座標 x と y を持つ 2 次元空間の場合，

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

で与えられる微小な長さ dl は，座標を回転させても変化しない．しかし，この dy を時間座標の微小な間隔 dt で置き換えた回転を考えることは，物理学として無意味である．そこでミンコフスキは，時間を含めるときには符号を反転し，

$$ds^2 = dx^2 - dt^2$$

という量（時間と空間をあわせた長さ要素を，空間の長さ dl と区別して ds と記した）が不変になるような“回転”を考えることにした．ただし，物理学の慣習として，子午線の長さの 4000 万分の 1 を 1 メートル，地球の（見かけ上の）自転周期を $24 \times 60 \times 60$ で割ったものを 1 秒と定義しており，空間と時間とでは尺度が異なるので，両者を換算するための定数 c を導入する必要がある（現在の c の定義に関しては，第 9 章 9-2 節を参照のこと）．換算定数 c は，マクスウェル電磁気学が正しいならば，真空中の光速と等しくなる．改めて書くと，

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \tag{1.10}$$

が“回転”の不変量となる．

(1.10) 式を一定に保つような変換の式を具体的に求めるために，虚数時間 $\tau = ict$ (i は $i^2 = -1$ となる虚数単位）を導入することにしよう．τ を使うと，(1.10) 式は虚数時間の間隔 $d\tau$ と空間間隔 dx の 2 乗の和の形になっているが，これを一定に保つような変換とは，τ と x を座標とするデカルト座標の回転に他ならない．そこで，まず，角度 ϕ の回転によって τ と x が τ' と x' に変換される式を書き下そう．

$$\tau' = \tau \cos\phi - x \sin\phi$$
$$x' = x \cos\phi + \tau \sin\phi$$

現実の時間は虚数時間 τ ではなく実数時間 t なので，上の変換を t を含む実数の式に書き直す必要がある．そこで，$\phi = i\theta$ と置き，三角関数と双曲線関数との関係式

$$\cos(i\theta) = \cosh\theta, \qquad \sin(i\theta) = i\sinh\theta$$

を使って書き直すと，次の変換式が得られる．

$$\begin{aligned} ct' &= ct\cosh\theta - x\sinh\theta \\ x' &= x\cosh\theta - ct\sinh\theta \end{aligned} \tag{1.11}$$

ここで，

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \sinh\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

と置けば，相対速度 v で x 軸方向に等速度運動する座標間のローレンツ変換の式になる．

ミンコフスキの解釈によれば，互いに等速度運動する座標系の間での変数変換は，時間と空間をあわせた座標系で (1.10) 式を不変に保つような一種の“回転”である．これは，運動を幾何学で解釈し直したことに相当する．ミンコフスキの想定した時間と空間をあわせた「時空」は**ミンコフスキ時空**と呼ばれるが，この時空における粒子の運動は，時間とともに位置を刻々と変えるというダイナミックな過程ではなく，時空内部に存在する幾何学的な線——いわゆる「**世界線**」——になる（人間を近似的に粒子と見なすと，その生涯も，誕生で始まり死で終わる世界線で表される）．粒子がどのように動いていくかという力学的な問題は，世界線がどのように曲がるかという幾何学的な問題に置き換えられる．われわれの住む世界が近似的にミンコフスキ時空であり，その内部に特別な方向はなく“回転”しても何も変わらないとすれば，静止と等速度運動が区別できないことは自然な帰結として導かれる．

ここで改めて，1 次元の時間と 3 次元の空間から成る 4 次元の時空について，式を書いておこう．表記を簡単にするために，x の右上に 0 から 3 までの数字をつけた座標変

数を利用する（0 が時間成分，1 から 3 が空間成分となる）．

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

ミンコフスキ時空内部の回転に対応する座標変換に対して一定に保たれるのは，次の量となる（以下の記述では，テンソルの添字がギリシャ文字の場合は時間を表す第 0 次元を含むものとし，式に同じ記号が現れた場合は，和の規約に従って 0 から 3 まで足し上げる）．

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.12}$$

ただし，$\eta_{\mu\nu}$ は**ミンコフスキ計量**と呼ばれるもので，行列の形で表すと次式のようになる（行列の左上端を η_{00} とする）．

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

符号について一言述べておく．ミンコフスキ計量の対角成分の符号としては，ここで記したように $(-,+,+,+)$ とする場合と，$(+,-,-,-)$ とする場合がある．これは単なる定義の違いであり，どちらを用いてもかまわない．力学的な議論をする場合には，時間に関する項をプラスにする方が運動エネルギーなどの符号が見やすくなってわかりやすい．一方，幾何学的な議論をするときには，まず空間での幾何学を考え，これに時間座標を加えるという論法になるので，空間をプラスにする方が話がスムースに進められる．拙著『明解 量子重力理論入門』（講談社）では，力学的な議論を先行させたので $(+,-,-,-)$ という符号の取り方を選んだが，本書では幾何学的な議論を中心にするため，符号を逆にしておいた．

ミンコフスキの定式化によると，静止と等速度運動が原理的に区別できないという相対性原理は，われわれの住む世界が近似的にミンコフスキ時空であり，そこに存在する世界線の曲がり方といった幾何学的性質が座標系を“回転”させても変化しないという主張として解釈できる．

ここで，§1-1-1 の議論と比較していただきたい．どちらも，幾何学に基づく定式化であり，幾何学的な性質が座標系の選び方に依存しないことが本質的な役割を果たす．最も基本的な不変量は，(1.3) 式や (1.12) 式のように，微小な座標間隔の 2 次式の形をして

いる．このように，数学的な形式が類似していることから，§1-1-1 のリーマン幾何学と §1-1-2 の 4 次元幾何学は統合できそうに見える．一般相対論は，まさにそのような理論である．この理論は，1 次元の時間と 3 次元の空間を含んでおり，任意の座標変換に対して次の量が不変になる（和の規約に従って，μ と ν は 0 から 3 まで足し上げている）．

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.14}$$

ここで，$g_{\mu\nu}$ は 4 次元時空に拡張された計量テンソルであり，時空のあらゆる場所における長さを与える．時空上のどの地点であっても，座標系をうまく選べば，そこでの計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をミンコフスキ計量 $\eta_{\mu\nu}$ と一致させられる（これは，次節で述べる等価原理の帰結であり，ミンコフスキ計量の座標系を局所ローレンツ系と呼ぶが，本書では説明を省略する）．このような時空は，4 次元多様体と呼ばれる．ここでは，時間と空間の違いは，符号に集約されている．第 I 部の冒頭に，宇宙論では「宇宙を 1 つの構造体として扱う」と記したが，一般相対論に基づく現代的な宇宙論とは，宇宙を 4 次元多様体として扱うものである．

4 次元多様体は，具体性を持った数学的な対象である．第 IV 部で説明するように，宇宙がいくつも存在するという現代的な多宇宙（マルチバース）理論があるが，宇宙空間を何もない空っぽの空虚だと考えると，多宇宙理論は，空虚がいくつも存在するという奇妙で思弁的な主張のように思われよう．しかし，4 次元多様体ならば，複数の宇宙を明確に記述することが可能である．例えば，カオス的インフレーションと呼ばれる理論では，ある 4 次元多様体の一部が周囲とは異なる膨張をするため，物理定数の異なる 4 次元多様体の領域として別の宇宙が定義できる．

§1-1-3　等価原理

時間と空間が統合された 4 次元多様体が存在し，そこで計量テンソルが定義され，座標変換に対する不変性があるというのが，一般相対論の基本的な前提である．しかし，これだけでは物理学的な議論を始めるための枠組みが与えられたにすぎない．物理学の理論として定式化するためには，計量テンソルを決定する方程式を与えなければならない．そのような方程式のうち，一般相対論の枠組みに適合するものは無数にあるが，その中で最も広く知られているのが，アインシュタインの提案した方程式（宇宙項の有無による 2 つのバージョンがある）である．これに基づく理論は「アインシュタインの重力理論」と呼ばれることもあるが，一般相対論のほとんどの応用がこの方程式を用いており，実験・観測の結果とも良く一致しているので，単に一般相対論と言えば，通常はアインシュタインの重力理論を指す．

一般相対論が重力に関する理論になるのは，一般的な座標変換が相対加速度を持つ座

標系への座標変換を含むからである．一般相対論では，重力は時空のゆがみに起因するものと見なされ，計量テンソルの成分が重力場となる．重力が存在しない時空の計量は，ゆがみのないミンコフスキ計量 (1.13) となる．

慣性の法則が成り立つ座標系と，それに対して加速度を持つ加速度系を考えよう．ニュートン力学によると，加速度系には質量と加速度の積の形をした慣性力と呼ばれる“見かけの力”が現れる．円運動における遠心力が，こうした見かけの力の例である．物理現象として見ると，慣性力は，多くの点で重力ときわめて良く似ている．例えば，一定の加速度で上昇するエレベータの内部では，全ての物体に質量と加速度の積に等しい下向きの力が作用しているので，あたかも重力が増加したように感じられる．なぜ，重力と慣性力はこれほどまでに似ているのか？ 静止と等速度運動が区別できない理由を，ミンコフスキ時空における“回転”不変性に求めたのが，特殊相対論である．これと同じように，重力と慣性力が区別できないほど良く似ているのは，われわれの住む世界が，加速度系への座標変換に対して不変性を持っているからではないだろうか？

慣性力と重力が区別できないとすると，重力の方程式に対する制約条件が得られる．加速度運動するエレベータを例にして，説明しよう．エレベータ内部にある質量 m の物体に下向きに mg という力が加わっていたとき，重力加速度 g の重力場内部にいるのか，加速度 g で上向きに等加速度運動しているのか，あるいは重力場と加速度運動の効果がミックスされているのか，エレベータ内部でどのような物理実験を行っても決定することはできない（厳密に言うと，場所による重力場の差異を感知することができれば，重力源の有無を推定することは可能である）．

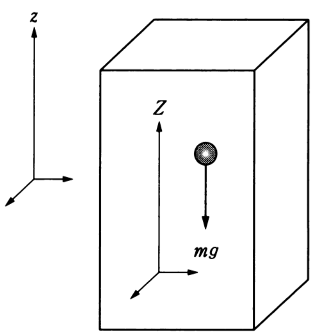


図 1-2　自由落下するエレベータ内部の物体

いま，鉛直下向きに一様な重力加速度 g が作用している場所でエレベータを自由落下

させる（下向きに加速度 g で運動させる）ことを考えよう（図 1-2）．このとき，エレベータの内部では，慣性力と重力が打ち消しあって無重力状態になる．鉛直方向上向きを z 軸の正の向きとし，時間座標と z 座標だけを考えることにして，地表に固定された時間と空間の座標を t と z，エレベータ内部での座標を T と Z で表す．自由落下を始めた瞬間に両方の座標は一致しているものとすると，落下開始直後で相対速度が小さいときには，時間座標は（相対速度が小さいという仮定の下で）一致し，z 座標は地表に固定された方が重力加速度 g による落下の分だけ下がっている．したがって，座標変換の式は（相対速度が小さいという近似の範囲で）次のようになる．

$$T = t, \qquad Z = z + \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.15}$$

地表に固定された座標系では，重力が存在するために，一般にミンコフスキ計量とは異なる計量テンソルになっている．この計量テンソルの成分を g_{00}, $g_{03}(= g_{30})$, g_{33} と書くことにすると，ds は次のように表される．

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{03}cdtdz + g_{33}dz^2$$

一方，エレベータ内部では重力がなくミンコフスキ時空と同等になるので，微小な長さ要素 ds は，ミンコフスキ計量の式で与えられる．これを，(1.15) 式を使って書き直すと，次のようになる．

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2dT^2 + dZ^2 \\ &= -c^2dt^2 + (dz + gtdt)^2 \\ &= c^2\left(-1 + \frac{g^2t^2}{c^2}\right)dt^2 + 2gtdtdz + dz^2 \end{aligned}$$

2 つの ds の式を比較すれば，一様な重力場があるときの計量テンソルが求められる．特に g_{00} を計算すると，次のようになる．

$$g_{00} = -1 + \frac{g^2t^2}{c^2} = -1 + \frac{2}{c^2}gh$$

ただし，$h = gt^2/2$ は落下距離である．

ニュートンの重力理論によれば，重力は重力ポテンシャル Φ から導かれる．重力加速度が一定値 g のとき，基準点から h だけ下がった地点での重力ポテンシャルは，$\Phi = -gh$ で与えられるので，g_{00} は，

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2}\Phi$$

と表される．

説明は省略するが，これはかなり一般性を持った式であり，一様な重力加速度を持つ重力場以外でも成り立つ．例として，質量 m の天体のケースを紹介しよう．天体中心から距離 r の地点での重力ポテンシャル Φ は $\Phi = -Gm/r$ （G：万有引力定数）なので，天体の周囲の計量テンソルの g_{00} 成分は，

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2Gm}{c^2 r} \tag{1.16}$$

となる（厳密に成り立つ式ではないので，近似式の形で表した）．

ニュートンの重力理論では，重力ポテンシャル Φ は，質量密度 ρ が重力源になることを示す次の微分方程式から求められる．

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho \tag{1.17}$$

ただし，$\triangle$ は次式で定義されるラプラス演算子である．

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.18}$$

微分方程式 (1.17) の解は，次の形に表すことができる（これは，ラプラス演算子のグリーン関数を用いた解法である）．

$$\Phi = -G\int d\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

この式からニュートンの重力理論が導けることは，すぐにわかるだろう．

ニュートンの重力理論が良い近似になっている場合は，g_{00} にラプラス演算子を作用させると質量密度 ρ に比例する項が現れる．特殊相対論によれば，質量が m の物体は質量エネルギー mc^2 を持ち，質量密度が ρ ならばエネルギー密度が ρc^2 になるので，一般相対論の基礎方程式は，計量テンソルに 2 階の微分演算子を作用させると，その成分にエネルギー密度が含まれるようなテンソルになると予想される．こうしたテンソルとしては，**エネルギー運動量テンソル**が知られている．ただし，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ とは，成分が次のような 2 階のテンソルである．

T_{00}	：	エネルギー密度
$T_{0i} = T_{i0}$	：	運動量密度 = エネルギー流束
T_{ij}	：	運動量流束

以上をまとめると，ニュートンの重力理論から求められる式は，次の形に書き換えられる．

$$\triangle g_{00} \approx -\frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$$

計量テンソルが満たす方程式は，ニュートン近似で上の式に帰着するものでなければならない．この要請に基づいて，最初にアインシュタインが提案したのが，次の式（「宇宙項のない」**アインシュタイン方程式**）である．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

ただし，$R_{\mu\nu}$ は (1.4) 式を 4 次元に拡張したリッチテンソル，R はスカラー曲率（(1.6) 式の添字の範囲を 0 から 3 までに拡張したもの）である．導き方は省略するが，(1.19) の左辺は，計量テンソルの 2 階微分を含む式になっており，ニュートン近似で $\triangle g_{00}$ になる．また，

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

は**アインシュタインの重力定数**と呼ばれる定数である．

§1-2-4 で説明するように，アインシュタイン方程式 (1.19) には，後に宇宙項と呼ばれる補正項が付け加えられた．

1-2 節　　空間はどんな“形”をしているか？

一般相対論によれば，空間は原子をその中に入れるための単なる容器ではなく，それ自体が物理現象の担い手となる媒質である．われわれが生きている宇宙では，空間はほとんどゆがみのない平坦な状態であるため，重力以外に空間のゆがみに起因する物理現象を実感することはない（空間がほぼ平坦なのは，宇宙誕生直後に第 II 部で述べる急激な膨張が生じた結果であり，平坦な状態が自然な姿という訳ではない）．しかし，物理学的な空間が，光を伝える水やガラスと同じように重力を伝える媒質である以上，宇宙を構成する空間の“形”を考えることができるはずである．

宇宙空間は，どんな“形”をしているのだろうか？　この問題は，前年に一般相対論の定式化を完成したばかりのアインシュタインによって，1916 年に考察された．

§1-2-1　中心がある宇宙

現在では想像しにくいことではあるが，当時の天文学界では，銀河系（天の川銀河）が宇宙の唯一の天体集団だとする大銀河説と，19 世紀に発見された渦巻星雲を銀河系と同等の天体集団（島宇宙）と見なす島宇宙説が対立しており，決着が付いていなかった．

論争が決着を見るのは，アンドロメダ星雲までの距離が銀河系の差し渡しより遥かに大きいとわかった 1923 年である．1910 年代には，アメリカに数多く建設された大型の天体望遠鏡を用いた観測によって，渦巻星雲の運動速度がきわめて速く，天文学的には比較的短い数千万年という期間で銀河系を横断できることが示されており，渦巻星雲を銀河系の縁に存在するガス状天体と見なす大銀河説には無理があるという見方が強まっていた．しかし，アインシュタインが宇宙の構造を考えていたのはちょうど第 1 次世界大戦のさなかで，アメリカ天文学界の最新の情報は充分に入ってこなかったようだ．このため，彼は，まず銀河系を唯一の天体集団だとする観点から，宇宙の“形”についての考えを進めていった．

アインシュタインは，すでに恒星の周囲の重力場について調べていた．(1.16) 式に示されているように，質量 m の天体の周囲に生じる計量テンソルの成分 g_{00} は，天体からの距離を r とすると，定数 -1（$=\eta_{00}$）に $O(1/r)$ で弱くなる成分が付け加わった形をしている．これを計量テンソルの全成分に拡張した次の式は，孤立した重力源の周りにおける球対称で定常的な重力場を表している（計量テンソルが定数に近づくならば，適当な座標変数を選ぶことによってミンコフスキ計量に変換できる）．

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (\eta_{\mu\nu}\text{：ミンコフスキ計量}) \tag{1.20}$$

それでは，これが，宇宙空間全体の“形”を表す式なのだろうか？

銀河系の周囲の重力場が (1.20) 式と同じ形をしており，銀河系から離れるにつれてミンコフスキ計量に漸近すると考えると，宇宙の“形”はずいぶんと奇妙なものだと言えよう．宇宙空間のほぼ全てはミンコフスキ計量で表される空虚で何もない領域となり，その中にぽつんと銀河系が浮かんでいることになる．銀河が複数個存在するとしても，この銀河集団から遠ざかるにつれて宇宙空間の計量がミンコフスキ計量に近づくと考えると，やはり同じ奇妙さが生じる．

この奇妙さを回避するために，アインシュタインは，銀河系から遠ざかるにつれて，重力場が発散するのではないかと考えた．具体的には，銀河系から充分に離れた領域での長さ要素を，

$$ds^2 = -B dt^2 + A\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{1.21}$$

と表し，銀河系からの距離が大きくなるにつれて，

$$B \to \infty, \qquad A \to 0 \tag{1.22}$$

のように変化するものと仮定した．この場合，ちょうど遠方に重力バリアが存在するような状態になって，物質は銀河系から遠ざかることはできない．このように重力バリア

に周囲を囲まれた閉じた空間が宇宙を構成している——これが，アインシュタインの思い描いた空間の“形”だった．

しかし，遠方に質量が存在する可能性も含めてアインシュタイン方程式 (1.19) をいくら調べてみても，(1.22) 式のような振舞いをする解の存在は示せなかった．彼が思い描いた宇宙空間の“形”は，現実にはあり得なかったのだ（ちなみに，第 7 章 7-2 節で示すように，ブラックホールの内側からシュヴァルツシルト面を見たときの重力場は，(1.22) 式と逆に B がゼロ，A が無限大になる）．

§1-2-2　宇宙原理

銀河系からどこまでも遠ざかっていくとき，重力場が定数に近づくのでも発散するのでもないとすると，いったいどうなるのだろうか？　この疑問に答えられないまま考えを巡らせているうちに，アインシュタインは，そもそも「どこまでも遠ざかる」ことができないという可能性に思い当たる．地球上にいるとき，ある地点から遠ざかっていっても，地球の反対側に当たる対蹠(たいせき)点より遠くに行くことはできない．宇宙空間も地表面と同じように，銀河系から無限に遠ざかることができないような“形”ではないだろうか？

この発想の転換は，天の川銀河と同じような銀河が無数に見いだされている現在ではそれほど突飛なものと感じられないが，渦巻星雲の実態がほとんど知られておらず，宇宙には銀河系しか存在しないという見方が有力だった当時にあっては，驚くべきものである．

銀河系が唯一の天体集団だと仮定したままでこうした空間の“形”を定式化することはできないため，アインシュタインは，宇宙は至る所で同じような状態にあると仮定した．地球を球で近似した場合，地表のどこでも球面の曲率は等しくなる．それと同じように，宇宙空間のあらゆる場所がゼロでない一定の曲率でゆがんでおり，このゆがみが少しずつ積み重なって，全体として球面状の空間になると考えたのである．空間に曲率をもたらすのは主に物質による質量エネルギーだと考えられるので，宇宙全域にわたって物質がほぼ同じ密度で分布していると仮定できる．このように，宇宙空間は至る所でほぼ均質だという前提は，**宇宙原理**と呼ばれる．アインシュタインは，観測による裏付けのないまま，この宇宙原理を導入したのである．

球面のように至る所で同じようにゆがんでいる空間は，一様（どの場所でも同じ）かつ等方（どの方向を見ても同じ）だと言われる（空間全域で同じ向き・同じ大きさの重力が作用している場合のように，一様だが等方ではないケースもあるため，一様だけではなく等方という条件も必要である）．宇宙原理を満たす一様等方空間が宇宙の“形”だというアイデアは，現在まで受け継がれる基本的な宇宙観となっており，観測によって

も高い精度で確認されている．

§1-2-3　球面状の宇宙

全ての場所で同じ曲率を持つ一様等方空間とは，どのようなものだろうか？　2 次元の場合，全ての場所が同じ曲率を持つ曲面として，球面が知られている．そこで，2 次元の球面を 3 次元に拡張することを考えてみよう．

§1-1-1 の例で説明したように，2 次元球面の幾何学は 2 次元だけで閉じてはいるものの，3 次元空間の中に埋め込んで 3 次元球の表面として表すとイメージしやすい．そこでまず，3 次元に拡張された球面を，4 次元のユークリッド空間の中に埋め込んでみる．もちろん，4 次元の空間的な拡がりが現実に存在する訳ではない．あくまで，イメージしやすいように仮想的な 4 次元空間を利用するだけである．

4 次元の座標を，x, y, z, w 座標で表すことにする．この 4 次元空間に存在する半径 a の球面は，次式で表される．

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2 \tag{1.23}$$

2 次元球面の (1.8) 式と同じように，球面上の長さ要素 dl を x, y, z 座標で表そう．

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \tag{1.24}$$

これが，空間が 3 次元の球面状になっていることを表す式である．この式から，空間部分だけに関する曲率などを求めることができるが，その前に，時間をどう扱うかを決めておかなければならない．

最も簡単なのは，空間の構造が時間とともに変化しない定常的な場合である．このとき，4 次元の長さ要素は，

$$ds^2 = -d\,(ct)^2 + dl^2$$

となる（計量テンソルに余分な定数が入らないように，換算定数 c を乗じたものを時間座標と見なした）．計量テンソルを 4 行 4 列の行列として表すと，次のようになる．

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} + \frac{1}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy & xz \\ 0 & yx & y^2 & yz \\ 0 & zx & zy & z^2 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

添字が 0 から 3 までの値を取って煩わしいことを別にすれば，この計量テンソルから空間部分だけに関するリッチテンソルを求めるのは，§1-1-1 で示した 2 次元のケースと

ほとんど同じである．$x = y = z = 0$ となる原点で計算を行うと，リッチテンソルとして次の値を得る（(0) を付けて原点での値であることを示す）．

$$R_{\mu\nu}(0) = -\frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

スカラー曲率は場所によらずに一定の値となる．

$$R = g^{\mu\nu}(0)\, R_{\mu\nu}(0) = -\frac{6}{a^2} \tag{1.27}$$

ここまでは，空間の構造が 3 次元球面になっていると仮定して幾何学的な議論を行っただけである．物理の議論にするためには，さらに，これが重力場の方程式を満たしているかどうかを調べなければならない．

§1-2-4　宇宙項の導入

重力場の方程式を立てるためには，エネルギー運動量テンソルの成分を与えなければならない．一般の場合を論じると議論が煩瑣（はんさ）になるので，現在の宇宙のように，宇宙空間が冷え切っており，天体がまばらに存在するケースを考えることにする．宇宙空間が熱い場合は，光が満ちあふれているため，放射のエネルギーや運動量，それに伴う放射圧を考えなければならないが，冷え切った宇宙では，これらを無視することができる．宇宙原理に基づいて一様等方性を仮定しているので，物質の大規模な流れに伴う運動量も存在しない．さらに，天体が気体分子のように激しく動き回って衝突することもないので，物質による圧力もゼロとして良い．したがって，エネルギー運動量テンソルの成分としては，エネルギー密度だけが物質による質量エネルギー密度 ρc^2 という値を持っている．宇宙が冷え切った状態にあるという条件は常に成り立つわけではないが，しばらくはこの式を使って議論を進めることにしよう．

ここまでくると，アインシュタイン方程式 (1.19) の左辺と右辺がそれぞれ求められる．球面状空間を仮定したとき，原点（$x = y = z = 0$）での左辺は，(1.25)，(1.26)，(1.27) 式によって，

$$R_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}(0) = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

となる．一方，原点での質量密度を ρ とすると，アインシュタイン方程式の右辺は，

$$-\kappa T_{\mu\nu}(0) = -\kappa\rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．左辺と右辺が等しいというアインシュタイン方程式は，明らかに成立しない．

それでは，曲率が一定という宇宙原理を満たす解は現実的ではないのだろうか？　アインシュタインにとって，曲率が一定となる球面状の宇宙空間はきわめて自然に思えた．そこで彼は，この空間が解となるように，重力場の方程式そのものを変更する道を選んだ．新しく導入した重力場の方程式は，次のようなものである．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{1.28}$$

ここで導入された左辺第 3 項が，後に**宇宙項**と呼ばれるものであり，その係数となる λ が**宇宙定数**である．宇宙項を右辺に移項して，

$$-\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{\lambda g_{\mu\nu}}{\kappa}\right) \equiv -\kappa\left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\lambda)}\right)$$

のように書き換えると，エネルギー運動量テンソルの追加項と見なすこともできる．このとき，λ はあたかもエネルギーの一種のように見えるので，**暗黒エネルギー**と呼ばれることもある．暗黒エネルギーは，第 II 部で特に重要な役割を演じる．

直ちにわかるように，λ, ρ, a の間に次の関係式が成り立っているとき，(1.28) 式は，定常的な球面状空間の場合でも成り立つ．

$$-\frac{3}{a^2} + \lambda = -\kappa\rho c^2, \qquad \frac{1}{a^2} - \lambda = 0 \tag{1.29}$$

重力場の方程式 (1.28) において，λ は方程式に含まれる物理定数として扱われている．ところが，(1.29) 式を見ると，λ によって球面状宇宙空間の半径 a と物質密度 ρ が決定されてしまう．アインシュタインはこれで良しとしたが，物理定数が物質密度のような状態量まで決めてしまうとは，明らかにおかしい．この条件によれば，曲率一定の空間が定常状態になるためには，変数間にきわめて特殊な関係式が成り立っていなければならない．逆に言えば，一般的な状況では，この関係式は成立しておらず，定常的な曲率一定の空間は方程式の解にはならないはずである．

現在では，アインシュタインの議論のどこがおかしかったかがはっきりしている．彼は，当初，銀河系から充分に遠ざかったときに重力場がどうなるかを考察していた．この場合，銀河系内部の天体の運動速度が光速に比べて充分に小さいことから，時間とともに変動しない定常的な解を求めてもかまわない．しかし，彼は途中で考えを改め，新

たに，宇宙全体の平均的なエネルギー密度は一定だと仮定した．この仮定を採用するならば，銀河系以外の天体（当時のいわゆる渦巻星雲，こんにちでは銀河と呼ばれるもの）を考慮することが必要となるため，こうした天体の運動が光速に対して小さいかどうかを調べなければならない．しかし，銀河系外に関する天文学的な知識の乏しかったアインシュタインは，その効果を取り入れることを失念したのである．

定常状態が一般的な解にならないことから，現実の宇宙空間は非定常状態——すなわち，時間とともに変化する状態にあると推測される．次に，こうした宇宙がどのような時間変化をしているかを見ていくことにしよう．

1-3節　時間とともに変化する宇宙

曲率が一定のまま変化しない空間は，宇宙項を導入しない限り，アインシュタイン方程式を満たさない．これは，空間がどのような状態にあるかを考えれば納得できる．曲率がどの場所でも一定になるためには，物質が空間全域にわたって均一に分布していなければならない．しかし，こうした物質は重力の作用で互いに引き合うため，そのままでは同じ場所に留まっていられない．宇宙項は，この重力の作用を打ち消す斥力の働きをしている．しかし，宇宙空間のあらゆる場所で，物質による引力と宇宙項による斥力が厳密に釣り合っている状態は，きわめて不安定で実現しそうもない状態である．実際には，どこかで釣り合いが破れて空間が変化していくはずである．

空間の時間変化を一般的に議論しようとしても，数式が複雑になりすぎて手に負えない．そこで，曲率が場所によらないという幾何学的な性質を保ったまま変化するケースを考えよう．実際，われわれの宇宙は，観測された限りでこの条件を満たしている．観測データによると，宇宙空間の曲率は誤差範囲内でゼロとなっているが，ここでは，§1-2-3 で説明した球面状空間が，球面のまま膨張する過程を考えてみよう（曲率ゼロの空間は，球面状空間の半径が充分に大きい極限として表すことが可能である）．このとき，球面の半径 a は，時間の関数 $a(t)$ となる．

ここで，空間が膨張するとはどういうことかを説明しておきたい．空間（および時間）における長さは，計量テンソルによって決定される．しかし，重力以外の力が作用する物理現象に関しては，計量テンソル以外に長さを左右する量が含まれている．例えば，水素原子の大きさ（原子核の周囲に存在する電子の拡がり）は，電子の電荷と質量，プランク定数が与えられれば，量子論によって決定される．計量テンソルが変化して空間が膨張しても，量子論によって決定される原子の大きさは変化しない．原子の大きさを含めて全てが一斉に大きくなるならば，空間が膨張していることは認識できないが，

原子の大きさが変わらないので，例えば，原子間隔が一定の結晶でできた物差しを尺度として長さを計測することができ，そのデータをもとに，空間が膨張していると結論できる．

§1-3-1　共動座標と宇宙標準時

球面状空間が全体として膨張（または収縮）する場合，これまで使ってきた (1.24) 式のような空間座標 x, y, z を使うのは，便利ではない．このことを理解するために，球面の上に固定された銀河を考えることにしよう．これらの銀河は，（量子論的に決定される原子間隔を長さの基準にすると）球面の半径 a が増大するにつれて互いに離れていく．一方，銀河や恒星系のような天体システムは，凝集して銀河間の空間より遥かに強くなった重力によって構造が維持されているので，（原子間隔を基準にした）大きさは変化しない．個々の銀河の大きさが変わらず，互いの間隔が増大する状況を模式的に表すと，図 1-3 のようになる．ところが，この過程を (1.24) 式の空間座標 x, y, z で記述しようとすると，球面半径が増大しても空間座標の目盛が変化しないため，銀河は座標系に対して相対的に動いてしまう．これでは何かと不便なので，銀河が相対的に動かないような座標系を採用した方がわかりやすい．こうした座標は，銀河（あるいは銀河が位置している空間）とともに動くという意味で，**共動座標**と呼ばれる．

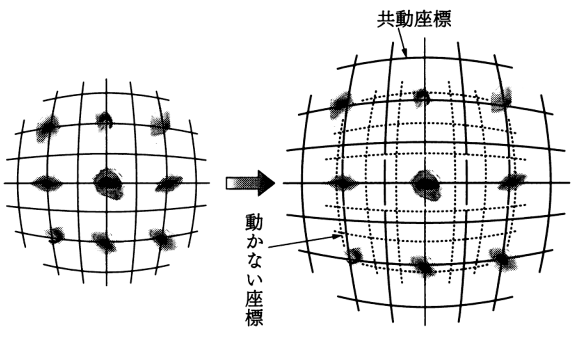


図 1-3　球面状空間が膨張するときの共動座標

銀河の間隔は，球面の半径 $a(t)$ と同じ割合で増大していくので，銀河の位置座標が変わらない共動座標 ξ, η, ζ に変換するには，(1.24) 式の空間座標 x, y, z を半径 $a(t)$ で割れば良い．

$$\xi = \frac{x}{a(t)}, \qquad \eta = \frac{y}{a(t)}, \qquad \zeta = \frac{z}{a(t)}$$

さらに，空間に固定された（すなわち，共動座標が一定の値になる）時計で時間を測定することを考えよう．宇宙原理によれば，球面状空間のどの場所でも同じように時間変化が生じるので，仮に宇宙誕生の瞬間から一斉に時計が動き出したとすると，宇宙空間の半径 $a(t)$ がある値になったとき，全ての時計が同じ時刻を指し示しているはずである．このように，共動座標に対して静止している時計が指し示す時刻を**宇宙標準時**と呼ぶ．宇宙標準時がある値のとき，宇宙空間全体は，半径が特定の値に定まった球面になっている．

宇宙標準時を使って時間を表すのは便利なので，宇宙の歴史を語るときには，いちいち断らなくても，宇宙標準時を使うのが一般的である．ただし，誤解のないように付け加えておくと，宇宙標準時が宇宙全体で共通する「いま」を表しているわけではない．相対論とは，時間を空間と同じく拡がった次元として扱う理論であり，観測者とは独立に「ここ」という場所が存在しないように，「いま」という時刻もない．実際，この宇宙標準時は，(1.11) 式に登場するローレンツ変換の時間とは異なっている．宇宙標準時は，宇宙空間が球面（あるいは，それ以外の何らかの幾何学構造）のまま膨張・収縮するケースで記述が簡明になるように導入された人為的な時間座標にすぎない．

宇宙標準時と共動座標を使うと，時間に依存するのは，球面の半径 $a(t)$ に限られる．そこで，(1.24) 式の dl を共動座標で書き直せば，長さ要素 ds は次式で与えられる．

$$ds^2 = -d(ct)^2 + a(t)^2 \left\{ d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + \frac{(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta)^2}{1 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \right\} \tag{1.30}$$

空間座標として，極座標 r, θ, ϕ を使うことも多い．極座標は，ξ, η, ζ と次の式で結ばれる．

$$\xi = r \sin\theta \cos\phi, \qquad \eta = r \sin\theta \sin\phi, \qquad \zeta = r \cos\theta$$

これは，3 次元ユークリッド空間の直交座標と極座標の関係に等しいので，直ちに次の関係式が成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= r^2 \\ d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \\ \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta &= r dr \end{aligned}$$

これを (1.30) 式に代入すれば，

$$ds^2 = -d(ct)^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right\} \tag{1.31}$$

を得る．r は 1 より小さな範囲に限られるが，これは，球面状空間の大きさが有限であることを示している．

(1.31) 式が，宇宙原理が成り立っている宇宙空間の“形”を表す式（きちんと言うと，§1-3-5 で示すように，3 パターンあるうちの 1 つ）である．宇宙がどのような“形”をしているかは，古代から多くの人が思い描いてきたが，それらは全て想像の域を出なかった．空間を媒質として扱う一般相対論の登場によって，初めて空間の“形”を具体的に表記することが可能になったのである．(1.30) または (1.31) 式は，これ以降の議論で基本的な役割を果たすことになる．

§1-3-2　フリードマン方程式

リッチテンソルを計算するには極座標を用いるのが一般的だが，ここでは，これまでの計算の仕方をふまえて，ξ, η, ζ を使い，$\xi = \eta = \zeta = 0$ となる原点でリッチテンソルを評価しておこう．

この計算は，ストレートだがひたすら面倒くさいので，取りあえず，計算結果だけを記す．

$$\begin{aligned} R_{00}(0) &= \frac{3\ddot{a}}{a} \\ R_{i0}(0) &= R_{0i}(0) = 0 \\ R_{ij}(0) &= -\delta_{ij}\left(2 + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2\right) \end{aligned} \tag{1.32}$$

この式からわかるように，3 次元球面が空間的に曲がっていることに起因する項（R_{ij} の括弧内第 1 項）に加えて，時間的に曲がっていることを表す a の時間微分の項が曲率に寄与している．

実際に計算を遂行するには，次のような手順で行う．まず，計量テンソルを次の形で表しておく．

$$\begin{aligned} &g_{00} = -1, \quad g_{0i} = g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \gamma_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \\ &g^{00} = -1, \quad g^{0i} = g^{i0} = 0, \quad g^{ij} = \frac{1}{a^2}\gamma^{ij} \\ &\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi\eta & \xi\zeta \\ \eta\xi & \eta^2 & \eta\zeta \\ \zeta\xi & \zeta\eta & \zeta^2 \end{pmatrix} \qquad (\gamma^{ij} \text{ は } \gamma_{ij} \text{ の逆行列}) \end{aligned}$$

この表記では，時間に依存する項と空間に依存する項が分離されているので，計算がかなり簡単になる．γ_{ij} は (1.9) 式の 2 次元球面のケースを 3 次元に拡張して（あるい

は，(1.25) 式の空間部分だけを抜き出して）$a=1$ と置いたもので，3 次元球面の空間部分の振舞いを示している．原点での計量テンソルは，上の式で $\xi=\eta=\zeta=0$ と置けば直ちに得られる．また，計量テンソルの微分は，次のようになる．

$$\partial_0 g_{ij}(0) = 2a\dot{a}\delta_{ij} \qquad \left(\dot{f} \equiv \partial_0 f = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$\partial_0\partial_0 g_{ij}(0) = 2\left(a\ddot{a}+\dot{a}^2\right)\delta_{ij}$$
$$\partial_i\partial_j g_{kh}(0) = a^2\partial_i\partial_j\gamma_{kh}(0)$$

これ以外の 1 階，2 階微分は全て 0

原点で値を持つクリストッフェル記号とその 1 階微分は，次のものに限られる．

$$\Gamma^0_{ij}(0) = a\dot{a}\delta_{ij}, \qquad \partial_0\Gamma^0_{ij}(0) = \partial_0(a\dot{a})\delta_{ij}$$
$$\Gamma^i_{0j}(0) = \Gamma^i_{j0}(0) = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \qquad \partial_0\Gamma^i_{0j}(0) = \partial_0\Gamma^i_{j0}(0) = \partial_0\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\delta_{ij}$$
$$\partial_h\Gamma^i_{jk}(0)$$

最後の項は空間部分だけに依存しており，最終的なリッチテンソルには，時間的な変化がない 3 次元球面に関する (1.26) 式で $a=1$ と置いたものを加えるという形で寄与する（具体的には，(1.32) 式に記した R_{ij} の括弧内第 1 項となる）．これらの式を使って，添字の付け方を間違えないように慎重に計算すれば，リッチテンソルを求めることはそれほど困難ではない．

このリッチテンソルから求められるスカラー曲率 R は次式で与えられる（計量テンソルに a が含まれることを忘れないように）．

$$R = g^{\mu\nu}(0)\,R_{\mu\nu}(0) = -\frac{6}{a^2}\left(1+a\ddot{a}+\dot{a}^2\right) \tag{1.33}$$

原点でのリッチテンソル（(1.32) 式）とスカラー曲率（(1.33) 式）を宇宙項を含む重力場の方程式 (1.28) に代入すれば，a の時間変化を与える方程式が導ける．ここでは，議論を簡単にするために，§1-2-4 と同じく，質量密度 ρ に由来するエネルギー密度以外のエネルギー運動量テンソルの成分は全てゼロになるものと仮定する（より厳密な議論では，圧力 p が作用するものとして，ρ と p の間に状態方程式を立てなければならない）．

重力場の方程式は，対角項だけが値を持ち，時間成分（$\mu=\nu=0$）と空間成分（$\mu=\nu=1,2,3$ のどれか）の 2 つがある．それぞれを具体的に記しておこう（(1.29) 式に a の時間微分の項が加わった形であることに注意）．

$$-\frac{3}{a^2}-\frac{3\dot{a}^2}{a^2}+\lambda = -\kappa\rho c^2 \tag{1.34}$$

$$1 + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - a^2\lambda = 0 \tag{1.35}$$

この 2 つの方程式に対して，半径 a と質量密度 ρ という 2 つの変数があるので，連立させて解けば各変数の変化を求められる．しかし，宇宙全体の振舞いを考えるときには，質量密度よりも半径の変化の方が重要なので，ρ を消去して a の方程式を求めよう．(1.34) 式の両辺を a^3 倍してから時間で微分し，(1.35) 式を使うと，直ちに次の保存則が導かれる．

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = 0$$

この式は，宇宙空間の半径と同じ割合で膨張していく領域では，内部に含まれる質量が一定になるという質量保存の法則を表している．1 辺 a の立方体内部で保存される質量を M とすると，次の式が成り立つ．

$$\rho a^3 = M \tag{1.36}$$

(1.36) 式から得られる ρ を (1.34) 式に代入して整理すると，a に関する 1 階常微分方程式を得る．

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa M c^2}{3a} + \frac{\lambda a^2}{3} - 1 \tag{1.37}$$

この式は，1922 年にフリードマンが導いた式（を整理し直したもの）であり，**フリードマン方程式**と呼ばれる（§1-3-5 で述べるように，右辺第 3 項の -1 が 0 や $+1$ に置き換えられたものもフリードマン方程式の一種である）．

§1-3-3　簡単なケース

フリードマン方程式の解の一般的な振舞いを見る前に，簡単なケースを調べてみよう．

(1) 宇宙項がない場合　(1.37) 式で宇宙定数 λ をゼロと置いてみよう．

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa M c^2}{3a} - 1$$

この方程式の解は，スケール因子 a がゼロから始まってしだいに大きくなり，a の時間微分がゼロとなる時刻で次の最大値を取る．

$$a = \frac{\kappa M c^2}{3} \quad (= a_0)$$

その後は減少に転じ，ゼロまで減少する．これは，宇宙がある時刻に誕生した後，膨張・収縮を経て再び消滅することを意味する．宇宙の生成・消滅が起こる解の存在が示

されたことで，宇宙全体の歴史を展望する可能性が拓かれたと言えよう．フリードマンの論文には，「宇宙の始まり」「宇宙の創造」などの表現が使われているが，こうした語句がまともな科学論文に登場した初めての用例だと思われる．

宇宙の生成・消滅を含むこの解は，しばしば「閉じたフリードマン宇宙」と呼ばれる．フリードマン自身は宇宙項の存在する方程式を研究していたのだが，その後，しばらくは宇宙項のないモデルが学界の主流になったため，宇宙項を欠いたケースにフリードマンの名が冠されたのである．閉じたフリードマン宇宙は，補助変数 τ を用いると，次のように表される．

$$\begin{aligned} a &= a_0\,(1-\cos\tau) \\ ct &= a_0\,(\tau-\sin\tau) \end{aligned} \tag{1.38}$$

(2) 質量がない場合　(1.37) 式で質量 M をゼロと置くと，次の式が得られる．

$$\dot{a}^2 = \frac{\lambda a^2}{3} - 1 \tag{1.39}$$

一般相対論を構築した当初，アインシュタインは，重力源となる質量がなければ空間は存在できないと考えていた．しかし，方程式 (1.39) を見るとわかるように，宇宙定数 λ が正ならば，質量がなくても空間を表す解が存在し得る．1917 年にド・ジッターによってこの解（に相当するもの）が発見されたとき，物質の存在しない空間とは何かを巡って，ド・ジッターとアインシュタインの間に論争があったが，現在では，初期の宇宙を表す現実的な解と見なされている．

次の式が方程式 (1.39) の解になっていることは，双曲線関数の性質を使えば直ちにわかる．

$$a = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t\right)$$

ただし，これは a が無限大の状態から無限の時間を掛けて収縮，最小値を取った後に永遠の膨張に転じるという解なので，物理的に意味を持たない．§1-3-5 で述べるように，一様等方という性質を持つ空間の方程式には，(1.39) 式右辺第 2 項の -1 が 0 や $+1$ に置き換わったものもあり，そちらの方が現実的かもしれない．いずれにせよ，a が小さい場合には，M（より一般的には物質に関する項）を単純にゼロと置くことはできない．

ここで興味深いのは，a が充分に大きいときの解の振舞いである．(1.39) 式から直ち

にわかるように，このときの a は

$$a \sim \exp\left(+\sqrt{\lambda/3}t\right)$$

のような指数関数的な振舞いを示す．a を時間で微分した膨張速度も指数関数的に増大するので，いわゆる**加速膨張**の状態になる．

膨張が加速されるというのは，何か不自然な印象を受けるかもしれない．例えば，バルーン内部の圧力が急速に高まるとバルーンは膨張を始めるが，膨張速度は減少していく．これは，膨張をもたらす過剰な圧力が，膨張とともに減少していくからである．しかし，宇宙項による膨張の場合，膨張の原因となる λ は単なる定数であり，膨張してもその値は変わらない．エネルギー密度と同じような形で方程式に現れるにもかかわらず，いくら膨張しても薄まることなく膨張をもたらし続ける．この結果として，膨張は加速され指数関数的な振舞いになる．

宇宙定数をエネルギーと見なすと，これはいささか不可解な性質である．言ってみれば，真空に無尽蔵のエネルギーが潜んでおり，どこまでも空間を膨張させ続けることになる訳である．“暗黒”エネルギーという呼び方も，的を射ているかもしれない．宇宙定数が加速膨張を引き起こす仕組みについては，第 4 章でもう少し詳しく論じる．

§1-3-4　一般の解

次に，(1.37) 式の一般的な解を考えることにしよう．と言っても，解析的には解けないので，定性的な議論をするにとどめる．解の振舞いは，a の時間微分がゼロになり，膨張から収縮に転じることがあるかどうかで分類できる．

解の分類は初等的であり，物理学的にはそれほど面白くない．興味のある読者は，数学の演習問題として解いてみるのも良いかもしれない．

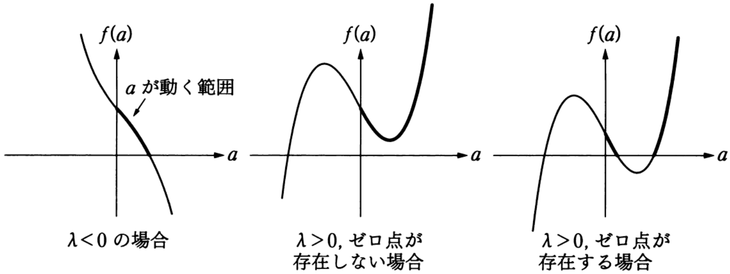


図 1-4　$f(a)$ のグラフ

(1.37) 式の右辺を a 倍したものを $f(a)$ と置くと，解が存在するのは，$f(a) > 0$ となる範囲である．膨張から収縮（あるいは収縮から膨張）へと転じることがあるかどうかは，$f(a)$ が $a > 0$ の範囲で 0 となるかどうかによって決まる．$f(0) > 0$ であることに注意すると，$\lambda < 0$ の場合，こうしたゼロ点は必ず存在するので，膨張から収縮へと転じる解が存在する．$\lambda > 0$ の場合は，M と λ の大小関係によって，ゼロ点が存在するかどうかが決まる．ゼロ点が存在しない場合は，$a = 0$ からいつまでも膨張し続ける．ゼロ点が存在する場合には，a がゼロから膨張して最大値に達した後に収縮してゼロに戻る解と，a が無限大から収縮して最小値に達した後に膨張して無限大になる解が存在する．

宇宙定数 λ が負のときには，a がゼロから始まって，膨張・収縮の後に消滅する宇宙となる．λ が正のときには，3 つのケースに分類される（図 1-5；図では a の呼称として一般的な「スケール因子」を使っている）．

① a がゼロから始まって，いつまでも膨張を続ける
② a がゼロから始まって，膨張・収縮の後に消滅する
③ a が無限大から小さくなって最小値を取った後，永遠の膨張に転じる

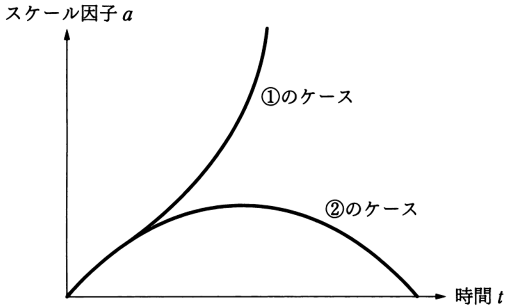


図 1-5 球面状空間の膨張パターン

このうち，③のケースは，現実に起こりそうもない（フリードマンは，a が最小値を取った瞬間が宇宙の始まりになると解釈している）．②のケースは，定性的な振舞いが閉じたフリードマン模型（宇宙定数 λ がゼロのケース）と一致している．一方，①のケースは，過去のある瞬間に宇宙が誕生するという点では②と同じだが，収縮に転じる

ことなくいつまでも膨張を続ける．

1980 年頃までは，宇宙項は存在しないとの見方が宇宙論研究者の間で支配的だったので，球面状空間ならば必ず収縮に転じると考えられてきた．しかし，宇宙項が存在すると，これが空間全域に瀰漫(びまん)する斥力の効果となって膨張を引き起こすので，①のケースのように，球面状空間でも永遠に膨張し続けることが可能になる．物質による引力は，空間が膨張し物質が互いに遠ざかるにつれて弱まるので，ある時点で暗黒エネルギーによる斥力が引力を凌駕(りょうが)し，それ以降は，膨張速度が次第に増加する加速膨張となる．超新星の観測から得られたデータは，現在の宇宙が加速膨張していることを強く示唆するので，膨張が永遠に続くという見方が支持を得ている．

§1-3-5　球面状空間以外のケース

1924 年，フリードマンは，球面状空間以外にも，宇宙原理を満たす一様等方空間が存在し得ることを見いだした．こうした空間は，球面状空間の計算をするときに導入した仮想的な座標軸 w と球の半径 a を純虚数に置き換えることで求められる．(1.23) 式で w と a を純虚数の iw, ia に置き換えると，

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -a^2 \tag{1.40}$$

となるが，これは，双曲面を表す式である．球面の場合と異なって，x, y, z は $-\infty$ から $+\infty$ まで動くことができるので，宇宙空間は無限の拡がりを持つ．長さ要素の式でも w を純虚数 iw で置き換えれば，

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2 \tag{1.41}$$

となる．(1.41) 式は，符号の付き方がミンコフスキの提案した時空と同じなので，(1.40) 式と (1.41) 式が表す空間は，ミンコフスキ空間の双曲面と言われることもある（ただし，w は時間とは何の関係もない仮想的な座標軸である）．この 2 つの式から

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

が得られる．球面状空間の場合と同じように，共動座標の極座標表示を採用すれば，

$$dl^2 = a^2 \left\{ \frac{1}{1 + r^2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right\} \tag{1.42}$$

となる．

曲率テンソルなどの値も，a を ia で置き換えることによって得られる．その結果，スカラー曲率 R は符号を変えるので，球面状空間の曲率を正とすれば，ここで考えている

空間（ミンコフスキ空間で定義されていることを忘れなければ，「双曲面状空間」と呼んでも良い）の曲率は負になる（曲率の定義の仕方はいくつかあるので，ここで言う正負は相対的なものである）．この空間は無限の広がりを持つので，球面状空間のような有限の「閉じた空間」ではなく，「開いた空間」と言われる．

一様等方な空間としては，もう1つ，ユークリッド幾何学の成立する平坦な（曲率ゼロの）空間があり，空間の長さ要素は次式で与えられる．

$$dl^2 = a^2 \left\{dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right\} \tag{1.43}$$

r は0から無限大まで変化できるので，これも無限に拡がった「開いた空間」である．

球面状空間を表す (1.31) 式と (1.42) 式，(1.43) 式をあわせて，一様等方な宇宙を表す式は，次のようにまとめられる．

$$ds^2 = -d\,(ct)^2 + a^2 \left\{\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right\} \qquad (k = 0, \pm 1) \tag{1.44}$$

この式で与えられる計量テンソルを，**ロバートソン・ウォーカー計量**と呼ぶ．一様等方性を持つ時空は，この3つのタイプしか存在しない（これしか存在しないことは，きちんと証明する必要があるが，その証明は，一般相対論の教科書にまかせる）．

一様等方性を持つ空間の幾何学的性質は，k を含む形で包括的に表すことができる．例えば，フリードマン方程式 (1.37) は，右辺第3項を k で置き換えた式になる．

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa M c^2}{3a} + \frac{\lambda a^2}{3} - k \tag{1.45}$$

k の符号が曲率の符号と対応していることから，k を含む項を曲率項と呼ぶこともある．

ここに登場する a という量は，球面状空間における半径のようなわかりやすいものではない．特に，曲率ゼロの平坦な宇宙の場合，幾何学的に定義することは困難である．そこで，ロバートソン－ウォーカー計量 (1.44) が a を定義しており，a によって宇宙空間の膨張の割合が表されると見なすことにする．こうした考えに基づいて，a は**スケール因子**と呼ばれる．球面状宇宙の場合，スケール因子 a は球面の半径となるが，現在の球面の半径を単位として，現時点での a の値を1とする文献も多い．

ロバートソン－ウォーカー計量を用いた宇宙モデルの計算は，宇宙論の基本となる．

1-4 節　観測データとの比較

本章の最後に，観測データではどのような宇宙像が支持されているかを述べておこう．

現在の観測データに基づいて確実に言えることは，次の 2 点である．①観測される範囲では，宇宙原理は高い精度で成り立つ．②宇宙は 137 億年前の高温・高圧状態（いわゆるビッグバン）から膨張を続けている．

宇宙が一様等方であるという宇宙原理は，銀河の分布に関するデータと，背景放射に関するデータから支持されている．銀河の分布に関しては，完全に一様ではなく数億光年にわたる超銀河構造が見いだされているが，平均的な密度からのばらつきはそれほど大きくなく，宇宙原理が満たされていると見なしてかまわない．より重要なのは，ビッグバンから 40 万年後の宇宙の状態を表していると考えられるマイクロ波背景放射のデータである．背景放射は，どの方向からも等しく絶対温度 2.725 K の黒体放射として観測されており，揺らぎはきわめて小さい．これは，どの方向を見ても，宇宙が同じような状態だったことを示している．われわれの住む天の川銀河は宇宙の中で特権的な地位にはないと考えられるので，宇宙空間はほぼ一様等方だと言える．

ただし，宇宙空間の全領域が観測できるわけではない．原理的に観測可能なのは，そこから放出された光が地球に到達し得るたかだか数百億光年の範囲に限られる（ビッグバンが起きたのは 137 億年前だが，光が伝わってくる間に空間が膨張するので，現時点で観測可能な範囲は 137 億光年より 3 倍以上も広い）．この範囲は，**観測可能宇宙**と呼ばれる．観測可能宇宙の外側でも宇宙原理が成り立っていて，観測されているのと同じような宇宙空間が拡がっているかどうかは，何とも言えない．観測可能な範囲のすぐ外側で状態が急激に変化することはありそうもないので，数千億光年以上の範囲にわたってほぼ均質な宇宙空間が拡がっていると推定されるが，それより先のことは全くわからない．

アインシュタインは宇宙が球面状であると考えたが，これまでのところ，空間全域の曲率としてゼロと異なる値は観測されていない．曲率が小さいことは，宇宙史の初期に急激な膨張が起きたとすれば説明できるので，宇宙空間が全体として球面状ないし双曲面状である可能性は排除されていないものの，いまのところ，宇宙空間は平坦なものとして記述される．

宇宙が 137 億年前に高温・高圧状態にあったことは，マイクロ波背景放射のデータによって確実視されている．さらに，多くの銀河が天の川銀河から遠ざかっており，その後退速度が距離にほぼ比例することから，宇宙空間が膨張していることも間違いない．

この 2 つをあわせると，宇宙はフリードマン方程式 (1.45) に従って，スケール因子 a がゼロの状態から膨張を続けているという見方が示唆される．しかし，フリードマン方程式は物質の状態に関する詳細を含んでおらず，a がゼロになる極限まで成り立つとは考えにくい．また，宇宙が膨張する過程に関しても，この方程式は修正されるべきだという見方が一般的である．観測データが充分に集まっていないので実証的な議論はしにくいが，膨張過程に関しては第 3 章，スケール因子 a がゼロとなる宇宙の始まりに関しては第 6 章で取り上げる．

第2章

場の量子論的な振舞い

2-1 節　素粒子を生み出す場

宇宙空間には，領域の広大さからすると少ないものの，かなりの量の物質が存在する．物質とは何からできていて，宇宙の進化にどのような影響を及ぼすのか？　この問いに答える準備として，現代物理学で物質の根源と見なされている量子場の基本を説明することにしよう．

20 世紀初頭の先進的な物理学者は，希薄なエーテルに満たされた空間内部を自由に動き回る粒子が存在し，これが物質を構成すると考えていた．こうした粒子は，当初は古代ギリシャ哲学にならって原子（atom）と呼ばれていたが，19 世紀に原子と見なされたものの内部に電子やイオンが存在することが判明したため，より根源的な粒子を表す素粒子（elementary particle）という言葉が使われるようになった．

素粒子とは，文字通りに解釈するならば，内部構造のない粒子を意味する．しかし，電子線回折の実験などを通じて，代表的な素粒子であるはずの電子が波動性を示すことが明らかになると，解釈の変更が必要となってきた．現在の解釈によると，語義矛盾になりそうだが，素粒子は粒子ではない．量子場が生み出す粒子的な状態であり，近似法の一種である摂動論近似が良い精度で成り立つ場合に限って，あたかも粒子であるかのように見えるだけである．こうした素粒子の振舞いを扱うのが，量子場理論である．この理論は，1920 年代末に提唱されたものの，具体的な計算を行おうとしても積分が収束しないという深刻な困難があったために，すぐには受け容れられなかった．だが，1960 年代に理論的な改良が進められ，1970 年代には多くの実験によって高い精度で検証された結果，現在では，定説としての地位を確立している．

素粒子が自立的な粒子として実在するとなると，宇宙誕生の瞬間にこれらの粒子がどのようにして生まれ，いかにして空間にまき散らされたか，宇宙が複数存在する場合に

は，それぞれの宇宙にどうやって配分されたかという問題が生じる．しかし，量子場理論の立場に立つと，素粒子は量子場から2次的に生成されたものなので，空間に量子場が拡がっていると仮定するだけで問題は自動的に回避される．1980年頃までの宇宙論では，陽子・中性子・電子といった既知の素粒子から成る物質が重力を作り出し，宇宙の構造を決定すると考えられていた．しかし，より現代的な宇宙論では，宇宙の誕生や進化の過程を考える際に，素粒子ではなく量子場を扱うことが基本となる．現代宇宙論を理解するには，まず，空っぽの空間の内部に物質を形作る粒子が飛び回っているというイメージを捨て去る必要がある．

本章2-5節で述べるように，量子場には，いくつもの種類がある．現在，広く受け容れられている**標準模型**では，既知の素粒子であるクォーク（陽子・中性子の構成要素とされる素粒子）やレプトン（電子やニュートリノなど），ヒッグス粒子（質量の起源となる素粒子）などに対して，それぞれの素粒子を生み出す量子場が存在するとされる．これ以外にも，**暗黒物質**と呼ばれる未知の物質の存在が確実になっているだけに，量子場がいくつあるかはわかっていない．こうした状況は，マクスウェル電磁気学成立前夜の状況と似ていなくもない．19世紀半ばには，光・電気・磁気を媒介するエーテルがそれぞれ別個に想定されており，何種類ものエーテルが空間全域を覆うと見なされていた．現代宇宙論でも，まず時空が4次元多様体として存在し，これを覆うように，何種類もの量子場が重なって存在するとされる．マクスウェルが光を含む電磁気現象の全てを統一的に扱う方法を考案したのと同じように，近い将来，いくつもの量子場を統一することが可能になるかもしれない．しかし，現時点で，時空と量子場を統一する量子重力理論はもちろんのこと，量子場だけの統一理論も完成していない．このような段階で，各種の量子場に関して個別的な説明をすることは，必ずしも宇宙論全般を見渡す上で有益とは思えない．そこで，本書では，いろいろなタイプの量子場を個々に取り上げるのは止めて，宇宙論に最も関係の深いスカラー場に議論を絞ることにする．

2-2節　場の古典論

量子場の議論に入る前に，古典論の範囲で場とはどういうものかを説明しておこう．話を簡単にするために，時空は平坦でありミンコフスキ計量が使えると仮定する．

物理学における古典論とは，ニュートン力学やマクスウェル電磁気学のように，「物理現象が運動方程式に厳密に従う」ことを前提とする諸理論である．一方，量子論では，運動方程式は厳密には成り立っていない．一般的な考え方（必ずしも証明されてはいない）によると，古典論は，量子論で現れる揺らぎの効果を無視した近似であり，量子論

に完全に包含される．しかし，人間の認知のスキームは古典論の方に親近性があるため，まず古典論で理論を定式化し，その後に量子化という手法に基づいて量子論に移行した方が，スムーズに理解できる．この考えに従って，まず場の古典論を見ていきたい．

ここで言う“場”とは，時空全域に拡がる物理的な実体である．良く知られている電磁場は，向きと強さを持つベクトル場（正確に言うと，電磁場の元になる電磁ポテンシャルがベクトル場で，電場と磁場をあわせたものが 2 階のテンソル場となる）だが，宇宙論で重要となるスカラー場は，強さだけを持つ場の量 $\phi(t, \boldsymbol{x})$ として表される．電磁場の値がゼロと異なると，荷電粒子に特定の向きの力が働くのでその存在が確認できるが，空間内部でスカラー場が一定の値を取っている場合は，向きを定めることができず力が働かないので，何もない状態（= 真空）と区別がつかない．こんにち主流となっている学説では，素粒子の標準模型におけるヒッグス場や，（第 3 章で解説する）インフレーション理論におけるインフラトン場のようなスカラー場が存在し，何もないように見える宇宙空間でもゼロと異なる値を取ると考えられている．

スカラー場の強度 ϕ に関する運動方程式は，ニュートン力学における「加速度 $a \times$ 質量 $m =$ 力 f」と同じように，一般に，時間に関して 2 階微分になると仮定される（より高階の微分があってはならないという原理的な理由はないが，これまでのところ，2 階微分までしか含まない理論でうまくいっている）．時空が平坦な場合，時間の 2 階微分を含む偏微分の組み合わせを作ると，最も簡単な運動方程式は，

$$-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \left(\text{スカラー量}\right)$$

となる（1-1 節で述べた和の規約に従って，上下に同じ記号が現れたときには 0 から 3 まで加える）．右辺のスカラー量をスカラー場 ϕ の任意関数とすると，運動方程式は次式になる．

$$\ddot{\phi} - \triangle\phi = -U'(\phi) \qquad \left(\dot{f} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \ddot{f} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \tag{2.1}$$

ただし，$\triangle$ は (1.18) 式で定義されるラプラス演算子である．また，式を簡単にするために，光速 c を含めた時間微分をドットで表した．

より一般的な運動方程式には，スカラー場 ϕ の 1 階微分や，他の場との相互作用項が含まれる．標準模型に含まれるヒッグス場は，こうした相互作用を通じて物質を構成する素粒子に質量を与える．また，宇宙論では，スカラー曲率 R とスカラー場 ϕ の相互作用を考える理論も注目されている．しかし，宇宙の膨張を議論する際に最も重要になる暗黒エネルギーの性質は (2.1) 式に含まれているので，ここでは，他の相互作用は省略する．

(2.1) 式の右辺に現れる U' は，任意関数 U を引数で微分したもので，この形を採用したのは，振動子とのアナロジーを利用するためである．フックの法則に従わないバネに質量 μ のおもりを取り付けて振動させる非線形振動子を考えよう（後で出てくる素粒子の質量と混同しないように，おもりの質量は m ではなく μ とした）．バネの弾性エネルギーをおもりの変位 q の関数として $U(q)$ と表すことにすると，弾性エネルギーを変位で微分したものがおもりに加わる復元力となるので，運動方程式は次のようになる．

$$\mu\frac{d^2q}{dt^2} = -U'(q) \tag{2.2}$$

運動方程式が (2.1) 式となるような場は，空間のあらゆる場所に微小な振動子が存在するシステムと見なすこともできる．場の強度 ϕ は，この振動子の変位に相当する．(2.1) 式に含まれるラプラス演算子の項は，近接する振動子間の相互作用を表しており，変位の差に比例する復元力が生じると解釈できる．

(2.2) 式の非線形振動子が持つ全エネルギー E は，おもりの運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和として与えられる．

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + U(q) \tag{2.3}$$

(2.3) 式を時間微分して (2.2) 式を適用すると，全エネルギー E が時間が経過しても変化しない保存量となることがわかる．

力学的な議論を行うと，スカラー場のエネルギー密度（単位体積あたりのエネルギー）ϵ を定義することもできる．具体的な導き方はネーターの定理について解説する第 4 章に譲ることにして，ここでは，ϵ の式を書き下ろしておこう．

$$\epsilon = \hbar c\left[\frac{1}{2}\left\{\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2\right\} + U(\phi)\right] \tag{2.4}$$

スカラー場 ϕ は長さの逆数の次元を持つ量として定義されるので，単位体積あたりのエネルギーとなるように係数を付けた（$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った量）．また，∇ は次式で定義されるベクトル演算子（スカラーの関数に作用させた結果がベクトルになる演算子）で，場の空間的な傾きを表す．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

係数と ∇ を含む項を別にすると，(2.4) 式が (2.3) 式と同じ形になっていることは，直ちに見て取れるだろう．

エネルギー密度の物理的な意味を理解するために，簡単なケースを考えてみよう．スカラー場がある値 ϕ_0 のときにポテンシャルエネルギー U が極小値を取るものとして，

その周囲で展開する．

$$U(\phi) = U(\phi_0) + \frac{1}{2}U''(\phi_0)(\phi - \phi_0)^2 + O\left((\phi - \phi_0)^3\right) \tag{2.5}$$

ϕ が ϕ_0 に近く，$\phi - \phi_0$ の 3 次以上の項を無視できる場合，運動方程式 (2.1) は ϕ の線形方程式になり，その解は，波動解の重ね合わせとして表される．例えば，x 軸の正の方向に伝播する波数 k の平面波は，任意定数となる振幅を a，初期位相を φ として，次の正弦波として表される（実際のスカラー場は，空間のそれぞれの向きに伝播するいろいろな波数を持った正弦波を，振幅・初期位相をつけて重ね合わせたものとなる）．

$$\phi \approx \phi_0 + a\cos(\omega t - kx - \varphi) \qquad \left(\omega^2 = c^2\left(k^2 + U''(\phi_0)\right)\right) \tag{2.6}$$

等号ではなく近似式の形で表したのは，ポテンシャルエネルギーの高次項を無視した場合の解だからである．(2.4) 式を使ってこのときのエネルギー密度を求めると，次のようになる．

$$\epsilon \approx \hbar c\left\{\frac{\omega^2}{c^2}a^2\cos^2(\omega t - kx - \varphi) + U(\phi_0)\right\} \tag{2.7}$$

この式の形から，エネルギー密度が，ある場所における波動のエネルギー（{　} 内第 1 項）とポテンシャルエネルギー（第 2 項）の和になっていることがわかる．

ここまでは，単にニュートン力学に従うスカラー場の一般論にすぎず，宇宙論とは縁がない．しかし，場が量子論的な振舞いをする場合，エネルギー密度の意味づけは大きく変わってくる．少し先回りして言うと，量子論的な場では波動が素粒子として振舞うため，(2.7) 式のエネルギー密度は，{　} 内第 1 項の素粒子のエネルギー（および零点振動のエネルギー）と，場のポテンシャルエネルギーの和となる．つまり，従来の宇宙論で重力源として扱われた質量を持つ物質のエネルギーは，場が持つエネルギーの一部でしかない．物質以外のエネルギーが，宇宙全体の運命を支配しているのである．

2-3 節　粒子の量子論

現代的な宇宙論をマスターするには場を量子論的に扱うことが必要になるが，場の量子化はかなり難解なので，まず粒子の量子論から始めたい．2-2 節で述べたように，場は微小な振動子が無数に集まったシステムと見なせる．そこで，1 つの振動子を量子論的に扱い，これを連結して量子場理論へとつなげていく論法である．

量子論にはいろいろな定式化があるため，初学者の混乱を招きやすい．多くの教科書では，粒子の位置 q の確率振幅を波動関数 $\Psi(q)$ として与える定式化が採用されている

が，これでは，粒子の本当の位置はどこかという疑問が最後までつきまとってしまう．本当の位置などないというのが正しい解釈だが，粒子と言っておきながら位置が決まらないのはいかにも不可解である．そこで，本書では，直観的にわかりやすい経路積分のアイデアに基づいて定式化してみたい．

量子論とは，ごくかいつまんで言うと，物理量が厳密な運動方程式に従っておらず，運動方程式の解の周りで量子論的な揺らぎ（**量子揺らぎ**）を示す理論である．

経路積分に基づく定式化では，作用 S を使って量子揺らぎを表すのが一般的である．作用とは，与えられた始状態と終状態を結ぶ経路に対して定義され，運動方程式を厳密に満たす経路に対して最小値（正確に言うと停留値）を取るような物理量である．例えば，運動方程式が (2.2) 式になるような非線形振動子で，始状態として時刻 $t = t_1$ で $q = q_1$ に，終状態として時刻 $t = t_2$ で $q = q_2$ になるケースを考えると，作用 S は次式で与えられる（S は，関数の関数——いわゆる汎関数——となるので，引数を表すのに [ ] を用いた）．

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 - U(q(t)) \right\} \tag{2.8}$$

ただし，この式に現れる経路 $q(t)$ は，$q(t_1) = q_1$，$q(t_2) = q_2$ を満たす t の任意関数であり，運動方程式の解とは限らない．$q(t)$ が運動方程式の解になる場合には，作用 S が最小値を取ることになる．

量子論における運動は，運動方程式の解となる経路だけでなくだけではなく，さまざまな経路 $q(t)$ が重なった状態として実現される．このとき，重ね合わせの重みとなるのが，各経路ごとに定まる作用 $S[q(t)]$ から得られる因子 $\exp(iS[q(t)]/\hbar)$ である．指数関数の引数に虚数単位 i が掛かっているので，この因子は作用 S の変化に対して振動し，正または負の値を取る．このため，ほとんどの経路は，重ね合わせることで正と負の項が打ち消しあってしまう．ところが，$S[q(t)]$ が最小値（停留値）を取るような経路の場合は，一般の関数において最小値での微分係数がゼロになるのと同じように，経路をわずかに変えても作用の値は最小値からほとんど変わらず，他の経路と打ち消しあうことがない．このため，作用が最小値を取る経路の寄与が圧倒的に大きくなり，それ以外の経路は，量子揺らぎと呼ばれるわずかな効果しか与えない．古典論とは，この量子揺らぎを無視した近似である．

ここでは触れなかったが，作用が停留値を取る経路が複数存在する可能性もある．こうしたケースでは，寄与の大きい古典解の経路とその周りの量子揺らぎという単純な区分はできず，古典論の範囲でも識別可能な複数の経路が重なり合った状態となる．こ

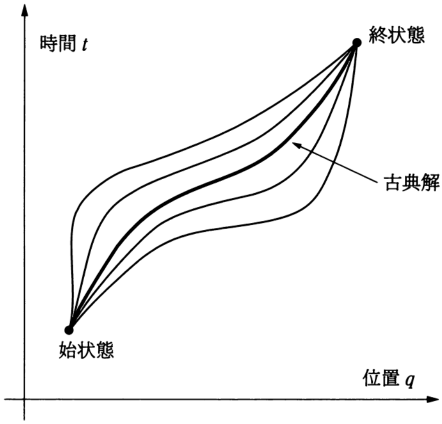


図 2-1　粒子の量子論における経路積分

れをどのように解釈すべきかが，多世界解釈（第 11 章）の論点となる．

量子論の基本原理は，「全ての経路に関して因子 $\exp\left(iS\left[q\left(t\right)\right]/\hbar\right)$ を重ね合わせた量が，始状態と終状態の間の遷移振幅を与える」というものである．ただし，遷移振幅とは，その絶対値を 2 乗したときに始状態が終状態に遷移する確率を与える量を指す．この関係は，始状態と終状態をそれぞれ P，Q とし，P から Q への遷移振幅を $A(\mathrm{Q};\mathrm{P})$ を表すと，形式的に次のように表される．

$$A\left(\mathrm{Q};\mathrm{P}\right)=\frac{1}{N}\int\prod_{t}dq\left(t\right)\exp\left(iS\left[q\left(t\right)\right]/\hbar\right) \tag{2.9}$$

右辺の積分は，時刻が t のときの位置 q が経路によってさまざまな値を取ることを踏まえて，全ての t に対して q を積分するという形で経路の重ね合わせを表しているが，もともと t は連続量であるため，あくまで形式的な表記でしかない．また，N は始状態 P から任意の状態に遷移する全確率が 1 になるように付けた規格化定数である（場合によっては別の係数が必要になることもあるが，ここでは省略する）．(2.9) 式右辺の積分は，**経路積分**と呼ばれる．

遷移振幅の式で，始状態 P を固定し，終状態 Q を変数として扱うこともできる．例えば，終状態 Q として，時刻が t のとき位置が q になる状態を選んだとすると，遷移振幅は q の関数となる．この関数が，量子論における波動関数 $\Psi(q,t)$ である．$\Psi\left(q,t\right)$ の絶対値を 2 乗すると，遷移振幅の定義からわかるように，始状態 P が与えられた場合，

時刻が t のときに位置が q になる確率を与える．さらに，(2.9) 式を変形すると，$\Psi(q,t)$ が満たす微分方程式が求められる．これが，有名な**シュレディンガー方程式**である．

> シュレディンガー方程式の求め方はここでは述べないが，大ざっぱに言うと，次のようになる．時刻 $t+dt$，位置 q の波動関数 $\Psi(q,t+dt)$ を (2.9) 式を使って表すと，経路積分が時刻 t までの部分と t から $t+dt$ までの部分に分けられる．時刻が t までの経路積分は，波動関数 $\Psi(q',t)$ を与える（q' は経路積分の積分変数である）．この式は，波動関数についての積分方程式になる．ここで，dt をゼロにする極限を取ると，$\Psi(q,t)$ が満たす微分方程式——すなわち，時間を含むシュレディンガー方程式が得られる．詳しい求め方は，経路積分の教科書，例えば，ファインマン・ヒッブス『量子力学と経路積分』（みすず書房）を参照していただきたい．

おそらく，多くの読者はシュレディンガー方程式に関して多少なりとも知識を持っていると思われるが，この方程式を量子論の原理と見なすよりも，経路積分から導かれるものと考えた方がわかりやすいだろう．

経路積分の計算法は，ホイヘンスの原理に基づく要素波の重ね合わせと良く似ている．例えば，波動光学では，ある経路に対する作用 S の代わりに，この経路を伝播した光波の位相 φ が使われ，ホイヘンスの原理に従って，各要素波の寄与が足しあわされる．計算法が似ていることから予想されるように，各経路からの寄与を重ね合わせた結果は，回折や干渉のような波動特有の現象を示すことになる．

波動の特質がはっきり現れるのは，ある領域に波が閉じ込められるようなケースである．例えば，水槽の水に振動を加えると，水槽の内側で反射した表面波が安定な共鳴パターンを形成するが，これと同じように，量子論的な現象でも，波が閉じ込められた場合には共鳴パターンが生じる．これは，充分に時間が経過した後に決まったパターンとして形成され，最初にどのような状態にあったかには依存しない．こうした共鳴パターンは，時間に依存しない定常的なシュレディンガー方程式の解を使って性質を調べることができる．

ここで，古典論の運動方程式が (2.2) 式で与えられる 1 次元振動子のシュレディンガー方程式を考えよう．定常的な波動関数として，

$$\Psi(q) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(q,t)$$

と置いた $\Psi(q)$ を使うと，シュレディンガー方程式は次の形で与えられることが知られている（この式は良く知られているので，導き方は示さない）．

$$E\Psi(q) = H\Psi(q) \tag{2.10}$$

ただし，H はハミルトニアンと呼ばれる演算子で，ポテンシャルエネルギー U を使って次のように表される．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dq^2} + U(q) \tag{2.11}$$

興味があるのは波が閉じ込められている場合なので，$|q|$ が大きくなるとどこまでも増大するような $U(q)$ を選ぶ．こうしたケースとして，次の 2 つを取り上げてみる．

【例 1】無限に深い井戸型ポテンシャル　まず，$U(q)$ として次のようなケースを考えよう．

$$U(q) = \begin{cases} 0 & \left(|q| < \dfrac{L}{2}\right) \\ +\infty & \left(|q| > \dfrac{L}{2}\right) \end{cases}$$

ポテンシャルが無限大になるところには波は進入できないので，$|q| > L/2$ で波動関数 $\Psi(q)$ はゼロになる．一方，ポテンシャルがゼロの領域でシュレディンガー方程式の解は，整数 n で指定される三角関数となる．

$$n \text{ が奇数のとき}\quad \Psi_n(q) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}q\right)$$
$$n \text{ が偶数のとき}\quad \Psi_n(q) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}q\right)$$

エネルギーは，n で指定される離散的な値となる．

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

これらの式は，ポテンシャルの井戸に閉じ込められた波の特性をよく表している．波は整数 n で指定される共鳴パターンを描き，エネルギーも離散的な値となる．エネルギーが最も低いとき（$n = 1$）の波動関数は，（$|q| = L/2$ となる両端以外に）値がゼロになるゼロ点を持っていないが，n が増してエネルギーが高くなるにつれて，ゼロ点の数が増える．このようなエネルギーの離散化やゼロ点の数の変化は，井戸型ポテンシャルに限らず，ある領域に波が閉じ込められたときの一般的な性質である．

【例 2】調和振動子　角振動数 ω で振動する調和振動子のポテンシャルは，次式で与えられることが知られている．

$$U(q) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 q^2 \tag{2.12}$$

実は，(2.11)，(2.12) 式をシュレディンガー方程式 (2.10) に代入した微分方程式は，特殊関数を使って解が表せるのだが，ここでは，解の形を推測することから始めてみよう．ポテンシャルは常に有限な値ではあるが，$|q|$ の値が大きくなるにつれてどこまでも大きくなるので，波が無限の彼方に遠ざかることはできず，閉じ込められて共鳴パターンだけが生き残る．(2.12) 式のポテンシャルは q の全ての値で解析的なので，井戸型ポテンシャルのときとは異なって，波動関数 Ψ も q の全領域で解析的になる．波が閉じ込められていることから，Ψ は $|q|$ が大きくなると急速に小さくなるはずである．さらに，井戸型ポテンシャルのときの類推から，エネルギーが最も小さいときには，Ψ はゼロ点を持たないと予想される．こうした性質を持つ最も簡単な初等関数は，$\exp\left(-\alpha^2\right)$ である．そこで，これを解の候補としてシュレディンガー方程式 (2.10) に代入すると，

$$\alpha = \frac{\mu\omega}{2\hbar}$$

のとき，シュレディンガー方程式の解になることがわかる．具体的に書くと，

$$u_0 = \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}q^2\right) \tag{2.13}$$

となり，対応するエネルギー E_0 は，

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

と求められる．

これ以外の解は，u_0 を元にして作ることができる．

解を求めるには，少しテクニックが必要となる．まず，式を簡単にするために，変数として q の代わりに次の Q を用いる．

$$Q = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}q$$

さらに，次の微分演算子の組を導入する．

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dQ} + Q\right)$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dQ} + Q\right)$$

ここで，

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}\left\{-\frac{d^2}{dQ^2} + \left(-\frac{d}{dQ}Q + Q\frac{d}{dQ}\right) + Q^2\right\} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dQ^2} + Q^2 - 1\right)$$

などの関係式があるので，

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

となる．また，ハミルトニアン H（(2.11) 式）は次のように表される．

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(-\frac{d^2}{dQ^2} + Q^2\right) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

次の関係式が成り立つことは直ちにわかる．

$$Ha^\dagger = a^\dagger(\hbar\omega + H)$$

ここで，(2.13) 式の u_0 に $a^\dagger$ を作用させた関数に，さらにハミルトニアン H を作用させてみよう．

$$Ha^\dagger u_0 = a^\dagger(\hbar\omega + H)u_0 = (\hbar\omega + E_0)\left(a^\dagger u_0\right)$$

となるので，$a^\dagger u_0$ はシュレディンガー方程式の解となり，そのエネルギーは次の E_1 となる．

$$E_1 = \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

同様に，u_0 に $a^\dagger$ を n 回作用させた関数 u_n もシュレディンガー方程式の解で，そのエネルギーは $\hbar\omega$ の $(n + 1/2)$ 倍になる．

シュレディンガー方程式の解が u_n 以外にないことは数学的に証明可能だが，その証明は，量子力学の教科書に譲る．

最終的な答えだけ書くと，シュレディンガー方程式 (2.10) の解に対して，エネルギー E は，

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.14}$$

で与えられる．$\hbar\omega$ をエネルギーの“塊”のように解釈すると，整数 n で指定される共鳴パターンが形成されているとき，このエネルギーの“塊”が n 個が存在することになる．この解釈は，ポテンシャルの形が調和振動子の形からずれると成り立たなくなるので，厳密には正しくないが，近似的な解釈としては役に立つ．そこで，エネルギーの塊をエネルギー量子と呼び，調和振動子が振動して量子論的な定常状態になったときには，エネルギー量子が n 個生成された状態にあると見なすことにする．このとき，$\hbar\omega/2$ というエネルギー量子以外の項が存在するが，これは，エネルギー量子が生成されてい

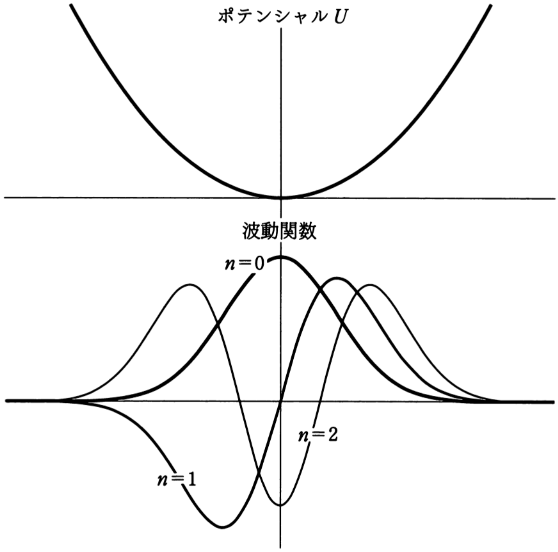


図 2-2　調和振動子のポテンシャルと波動関数

なくても存在する零点振動のエネルギー（**零点エネルギー**）である．零点振動は，量子揺らぎのためにおもりの位置が確定せずフラフラしていることによって生じるものでで，量子論では必然的に存在する．

2-4 節　　場の量子論

運動方程式が (2.1) 式で与えられるスカラー場は，微小な振動子が無数に集まったものと見なせるので，2-3 節の調和振動子の議論を応用することができる．粒子の量子論との対応をつけるため，まず，全ての場所で ϕ が同じ値を取る場合を考えよう．このとき，(2.1) 式のラプラス演算子が作用する項はゼロになるので，方程式の形は係数を除いて (2.2) 式と同じになる．ここで，調和振動子の式と比較するために，((2.5) 式の 2 次以外の項をゼロと置いて）ポテンシャル $U(\phi)$ は $\phi = \phi_0$ で最小値ゼロを取る 2 次式だと仮定しよう．

$$U(\phi) = \frac{1}{2}U''(\phi_0)(\phi - \phi_0)^2 \qquad (2.15)$$

スカラー場と調和振動子の運動方程式を比較すればわかるように，場の強度 $\phi - \phi_0$ が調和振動子の位置 q に相当する．さらに，スカラー場と調和振動子の間には，次の対応がある．

$$\frac{1}{c^2} \leftrightarrow \mu, \qquad U''(\phi_0) \leftrightarrow \mu\omega^2$$

スカラー場を調和振動子と同じように量子化できるとすれば，スカラー場のエネルギーは，(2.14) 式の ω を上の関係式で置き換えた式，すなわち

$$\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar c\sqrt{U''(\phi_0)}\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (2.16)$$

になると予想される．

本当のことを言えば，この議論は粗っぽすぎる．場を量子化する際には，空間内部に稠密(ちゅうみつ)に存在する無数の振動子を扱うことになるので，振動子のエネルギーをそのまま場の振動のエネルギーとするわけにはいかない．一般的な議論では，体積 V の領域で場を規格化し，この領域でのエネルギーを考えることになる．エネルギー量子の個数も，振動子ごとではなく，この領域内部で定義される．ただし，こうした正確な議論をしても，取り立てて見通しが良くなるわけではないので，ここでは粗っぽい議論のままで済ますことにする．

ここで，特殊相対論によると質量 m の物体は mc^2 の質量エネルギーを持つことを念頭に置いて，

$$U''(\phi_0) = \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \qquad (2.17)$$

と書いてみよう（この m を，振動子のおもりの質量 μ と混同しないように）．(2.16) 式からわかるように，零点振動による $+1/2$ の項を別にすると，このときのエネルギーがエネルギー量子 mc^2 の n 倍になることがわかる．このエネルギーは，質量 m の粒子が n 個静止している場合と等しいので，そのまま粒子として扱うこともできそうである．

エネルギー量子を粒子のように扱うことに，理論的な障碍(しょうがい)はないのだろうか？　いま，スカラー場は場所によらず同じ値を取ると仮定しており，空間方向の運動は存在しないので，粒子が静止しているという状況と一致している．スカラー場の振動は古典論の粒子のようには位置を特定できず，広い領域に拡がっているが，量子論の一般論に従うと，

これも矛盾ではない．静止している粒子は運動量がゼロに確定しているので，位置と運動量に関する不確定性原理によって，粒子の位置は完全に不確定になるからである．したがって，ポテンシャルが (2.15) 式の調和振動子の形をしているとき，場の振動で生成されるエネルギー量子をあたかも粒子のように扱うことに，何の障碍もない．このとき，粒子の質量は，(2.17) 式に示されるようにポテンシャルの係数で決定される．

素粒子が運動している場合は，場所によって変動するスカラー場を考えなければならない．ここで，(2.6) 式で表されるような正弦波を考えると，ω の式に (2.17) 式を代入することにより，

$$\hbar\omega = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4} \tag{2.18}$$

という関係式を得る．ところが，特殊相対論では，一般に，質量 m の粒子の場合，運動量 p とエネルギー E の間に，

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \tag{2.19}$$

という式が成り立つことが知られている．(2.18) 式と (2.19) 式を見比べればわかるように，スカラー場に角振動数 ω，波数 k の正弦波が生じている状態は，エネルギー $E = \hbar\omega$，運動量 $p = \hbar k$ の粒子の存在に対応している．エネルギーが (2.14) 式で与えられるような励起状態（基底状態より大きなエネルギーを持つ状態）では，この粒子が n 個存在すると見なせる．ポテンシャルが正確に 2 次式になっている場合は，正弦波が運動方程式の解になるので，この粒子は相互作用をせず，常に一定の運動量で飛んでいく．

それでは，ポテンシャル U が (2.15) 式のような 2 次式ではなく，一般の関数の場合にはどうなるだろうか？ 場がポテンシャルの最小値近傍にあるときには，(2.5) 式のように展開される．このとき，まず $\phi - \phi_0$ の 3 次以上の項を無視して相互作用しない粒子の運動を考え，次に 3 次以上の項の寄与を段階的に取り入れるような近似計算を行うことが可能である．この近似的な計算法は**摂動論**と呼ばれる．摂動論による計算が良い近似になる場合，相互作用しない粒子が一定の運動量で飛びながら，その途中で段階的に散乱されるという見方が成り立つ．これが，素粒子の粒子描像であり，摂動論の近似が良いときに通用する．しかし，摂動論の近似が悪いときには，場の振舞いは全く粒子らしくない．素粒子とは，この粒子らしくない場合も含めた呼称である．

実際には，ポテンシャルが 2 次式から少しでもずれると，短距離領域における相互作用の効果がどこまでも大きくなり，上のような単純な議論では済まなくなる．多項式のような“性質の良い”ポテンシャルの場合に限り，この問題は「繰り込み」という手法で処理することができる．繰り込み理論の説明はかなり難しくなるので，第 9 章 9-3

節でごく簡単に触れるにとどめる.

素粒子が粒子らしくない場合があることを，π 中間子を例にとって説明しよう．π 中間子は原子核の内部で陽子や中性子を結びつけるもので，実際にはクォーク場とグルーオン場（クォーク同士の相互作用を媒介する力の場）が複合的に励起した状態だが，近似的には，素粒子と同じように量子場を使って記述することができる．π 中間子が原子核から飛び出した場合，他に相互作用する相手がいないので，摂動論近似はきわめて良い．霧箱（荷電粒子が進入すると，その電離作用によって生じたイオンが凝結核となって水滴が形成されるため，粒子の飛跡が点々と現れる装置）で観察すると，π 中間子が電子を弾き出しながら飛んで行った飛跡がはっきりと残り，まるで本物の粒子が飛び回ったかのように見える．ところが，ひとたび原子核の中に入ると，他の π 中間子や陽子・中性子と強く相互作用するため，摂動論近似はきわめて悪くなる．原子核内部の π 中間子は個数も定まらず，粒子とは全く異質な振舞いをする．

2-5 節　場のエネルギー

ニュートン以来，20 世紀初頭までの長期にわたって，質量を持つ粒子が重力を生み出すというイメージが支配的だった．こうした質量を持つ粒子を取り除いていくと，最後には真空と呼ばれる何もない空っぽの空間が残るとされた，しかし，これは誤ったイメージである．質量を持つ粒子は，あくまで場の振動状態を摂動論で近似したものにすぎない．素粒子は，場の状態の一面を表しているだけであり，素粒子が存在しない空間にもエネルギーが存在する可能性はある．

素粒子を取り除いた後に残るエネルギーは，暗黒エネルギーと呼ばれる．すでに第 1 章 §1-2-4 で一般相対論に現れる宇宙項を暗黒エネルギーとして紹介したが，これ以外にも暗黒エネルギーは存在する．1 つは零点エネルギーである．エネルギー量子が励起されていなくても，場は量子揺らぎによってエネルギーを持つ．その値は，(2.14) 式に示したように各振動子ごとに $\hbar\omega/2$ となるが，有限の領域内部に無限小の振動子が無数にあるので，零点エネルギーの密度は，単純に考えると無限大になってしまう（この問題については，第 10 章 10-3 節で宇宙定数問題として再考する）．

もう 1 つの暗黒エネルギーは，場のポテンシャルエネルギーである．(2.7) 式によると，エネルギー密度は，基準となる ϕ_0 の周りの振動エネルギーと，ϕ_0 でのポテンシャルエネルギーの和になっているが，素粒子が持つエネルギーは，このうちの前者でしかない．宇宙空間には，さらにポテンシャルエネルギーが存在するはずである．

エネルギー密度の高いビッグバン状態から空間が膨張すると，それに伴ってエネルギー密度が下がっていく．エネルギー密度が充分に高い高温状態のとき，場は激しく変動して素粒子のスープのような状態だったが，エネルギー密度が下がると，場の変動は抑制され，ポテンシャルの値が小さい領域に閉じ込められる．宇宙が冷え切った状態では，ポテンシャルの最小値に落ち込んで安定する（温度の低下が急速に起きる場合は，ポテンシャルの最小値に落ち込まないうちに場の空間的・時間的変動がほとんどなくなり，空間全域でゆっくりとポテンシャルの坂を下るようになる場合もある）．このときのポテンシャルエネルギーが暗黒エネルギーとなり，その後の空間膨張の仕方を大きく左右する．

2-6節　標準模型と暗黒物質

ここまで量子場としてスカラー場だけを取り上げたが，本章冒頭で触れた標準模型によれば，スカラー場以外にも，さまざまな種類の量子場が存在する．基本的な相互作用としては，**非可換ゲージ理論**と呼ばれるものが想定されており，ゲージボソンを介して素粒子間の相互作用が生じるとされる．

素粒子は，統計的な性質の差異によって，フェルミ粒子とボース粒子に区分される．両者の最も大きな相違は，個数の保存則の有無であり，フェルミ粒子は個数（もう少し正確に言えば，同じタイプの素粒子における粒子と反粒子の個数の差）が一定に保たれるという性質があるが，ボース粒子にはそれがない．エネルギー密度が下がると，個数の保存則がないボース粒子は，原子核内部の π 中間子と同じように，フェルミ粒子との相互作用を通じて吸収・放出され続けるが，フェルミ粒子は，粒子と反粒子がペアになって対消滅しない限り消え去ることはないので，安定した存在となる．この性質があるため，主としてフェルミ粒子から構成される物質が宇宙空間に存在し続ける．

標準模型に含まれるフェルミ粒子には，6種類のクォーク（u クォーク・d クォークなどと命名されている），3種類の荷電レプトン（電子，μ 粒子，τ 粒子）とそれとペアをなす3種類の中性レプトン（ニュートリノ）がある．

ビッグバンのときには，粒子と反粒子は同じ数だけ生成される．宇宙空間が膨張し温度が下がるにつれて，大部分の粒子は反粒子と再び会合して消えていく．例えば，宇宙空間が高温だったときに生まれたクォークの大部分は，反クォークと出会って対消滅する．ところが，特殊な反応によって，反クォークがクォークと対消滅しない別の素粒子に変化することがある．こうなると，対消滅する相手を失ったクォークが，宇宙空間に取り残されてしまう．現在の宇宙に存在する物質は，主に，こうして取り残されたフェ

ルミ粒子から構成される．対消滅できなくなる特殊な反応（CP 非保存と呼ばれるタイプの素粒子反応）については，まだよくわかっていないことが多く，研究が続けられている．

ボース粒子の一種であるゲージボソンには，グルーオン・W 粒子・Z 粒子・光子がある．グルーオンにはクォークを結びつける働きがあり，グルーオンの相互作用によって 3 つのクォークが結びついた状態がバリオン（陽子・中性子など），クォークと反クォークが結びついた状態が中間子（π 中間子・K 中間子など）である．

標準模型には，これ以外にヒッグス粒子というスカラー場で記述されるボース粒子がある．ヒッグス粒子は凝集してゲージ対称性を破り，その結果として，クォーク・荷電レプトン・W 粒子・Z 粒子に質量を与える．

標準模型は，素粒子実験で得られるデータの大部分と矛盾のない結果を予測する．標準模型では説明のできない数少ないデータの 1 つに，ニュートリノ振動と呼ばれる現象があるが，これに関しては，抜本的ではない手直しによってデータと一致する模型を作ることができる．こうした手直しを行うことを容認すれば，標準模型は今のところ充分に高い信頼性を備えている．

しかし，宇宙論の観測データには，標準模型とうまく適合しないものもある．中でも重要なのが，銀河などの質量が標準模型の素粒子だけではうまく説明できないという点である．標準模型に含まれるフェルミ粒子のうち，通常の物質の質量は，主に u クォークと d クォークがあわせて 3 個結びついて作られるバリオンによってもたらされる．これらは光子と相互作用するので，電磁波の観測を通じてその量を推定することが可能である．ところが，天体の運動などから銀河の質量を推定すると，推定されるバリオンだけでは説明できない大きさになってしまう．そこで，バリオン以外の見えない物質が存在するという仮説が生まれた．こうした物質は，重力源になって銀河の構造形成などに寄与するものの，光と相互作用せずに電磁波では観測できないことから，**暗黒物質**と呼ばれる（暗黒物質の存在を仮定せず，重力の法則が一般相対論からずれているという過激な説を唱える科学者もいる）．

暗黒物質が素粒子かどうかはわからないが，もし素粒子だとすると，現在なお存在することからきわめて安定な素粒子であること，さらに，銀河を形成する上で重要な役割を果たしていることから光速よりずっと遅い速度で運動していることが必要である．標準模型には，光と相互作用しない安定な素粒子としてニュートリノが含まれているが，ニュートリノは光速とほぼ等しいスピードで飛び回っているので，少なくとも暗黒物質の主成分ではない．

暗黒物質の候補としては，標準模型を超える超対称性モデルに含まれる（超対称性パートナーと呼ばれる）素粒子が挙げられている．一部の物理学者が提唱するアクシ

オンやミラー物質が暗黒物質かもしれない．一方，暗黒物質は素粒子ではなく，ミニブラックホールや褐色矮星（わいせい）（恒星と同じような元素組成であるにもかかわらず，質量が小さいために核融合を起こせず自ら光ることのない天体）のような観測が難しい天体だという可能性も残されている．ただし，暗黒物質が全て天体だとすると説明の付かない観測データもあり，暗黒物質の少なくとも一部は，素粒子だと考えた方が良さそうである．

このように，現実にいくつの量子場が存在するのかも含めて，量子場には，今なお不明の点が数多く残されているが，それでも，宇宙全体の振舞いを理解するのに，量子場の考えはきわめて有効である．続く第II部以降では，ここまで紹介してきた一般相対論と量子場理論の基本を応用しながら，宇宙の進化・誕生・複数性の問題に迫っていきたい．

第 II 部

加速膨張する宇宙

現在の宇宙が，ビッグバンと呼ばれる高温・高密度状態から膨張してきたということは，多くのデータによって支持されている．宇宙が高温だった頃の名残とも言える背景放射は，1964 年にペンジアスとウィルソンによって発見されて以来，さまざまな方法で測定され，こんにちでは，絶対温度 2.725 K の黒体放射の分布曲線ときわめて良い精度で一致することが判明しているが，この結果は，ビッグバン理論と見事に調和する．また，宇宙空間に点在する数多くの銀河は，空間の膨張とともに互いに遠ざかっているが，その後退速度と距離は，1930 年代におけるハッブルとハマソンの先駆的な業績に示されるように，一般相対論から導かれる関係式にほぼ従っている．「ビッグバンを経て一般相対論の予想通りに膨張する宇宙」という描像は，標準的な宇宙モデルとして確立されたと言って良い．

しかし，こうした膨張が始まりの瞬間から常にフリードマン方程式に従っていたと仮定すると，第 3 章 3-1 節で述べるように，いくつかの乗り越えがたい問題が浮上する．少なくとも宇宙の初期においては，フリードマン方程式を何らかの形で修正しなければならないことは明らかである．こうした修正案の中で最も支持を集めているのが，いわゆる**インフレーション理論**である．この理論では，宇宙の初期に，暗黒エネルギーによって一時的に急激な加速膨張（**インフレーション**）が生じたと主張される．このため，宇宙の膨張は，フリードマン方程式に従う比較的単純な過程ではなく，かなり複雑な経過をたどることになる．

インフレーション理論は，必ずしも定説として受容されている訳ではない．観測データに基づく検証も確実ではなく，データと適合するように提案されたいくつかのモデルが競合している段階である．しかし，現代的な宇宙論の根幹となる理論であることは間違いない．さらに，近年の観測結果から，宇宙は初期の加速膨張からいったん減速膨張になった後，再び加速膨張に転じたという見方が有力になっているが，この現象を理解するためにもインフレーション理論は役に立つ．そこで，この第 II 部では，インフレーション理論を中心に，空間膨張がたどる経過について見ていくことにしよう．

第3章

インフレーションのメカニズム

インフレーション理論は，暗黒エネルギーを持つスカラー場の特性に注目することによって，一時的なインフレーションが起きるメカニズムを説明する．本章では，フリードマン方程式に従って宇宙が膨張するという「膨張宇宙の標準モデル」のどこに問題——それもかなり深刻な——があるかを述べた上で，インフレーションが起きたとするとこの問題がどのように解決されるのか，さらに，スカラー場を導入するとなぜインフレーションが起きるかを順番に述べていく．

3-1節　標準モデルの問題点

標準モデルを突き詰めると，観測データと合致しない結果がいくつか導かれてしまう．そうした問題の中には，物質に関する理論を手直しすることで対応できると予想されるものもある．例えば，素粒子論と宇宙論の標準モデルを組み合わせると，いまだに未発見のモノポール（磁気単極子）が数多く作られてしまうという問題が生じるが，これは，素粒子論の方を修正することで解決できる可能性がある．しかし，宇宙空間の膨張が常にフリードマン方程式に従うと考える限り，どうしても解決できない問題が少なくとも2つある．この2つに関しては，フリードマン方程式を柱とする標準モデルを修正しなければならない．それが，**平坦性問題**と**地平線問題**である．

§3-1-1　平坦性問題

宇宙論における最大の謎の1つは，空間全域での平均的な曲率がほぼゼロに等しいことである．宇宙空間が球面状だとすると，球の半径は，観測可能なたかだか数百億光年よりも遥かに大きいことになる．

空間が平坦であることがなぜ謎なのか，少し理解しづらいだろう．水槽の水を掻(か)き乱すと，初めのうちは複雑な波が立つが，時間が経つと波は消えて水面は水平になる．こ

れと同じように，宇宙空間も，ビッグバンの混沌が収まると，平坦になるのが自然だと思われるかもしれない．しかし，アインシュタイン方程式には，空間を自然に平坦にするような特別な性質はない．観測されている宇宙空間で曲率がほぼゼロであることは，説明されるべき特徴なのである．

平坦な空間が自然な状態でないことは，重力の作用を考えるとわかりやすい．第2章2-3節では，運動方程式を満たす粒子の軌道は作用 S を最小にすると述べたが，これは，厳密な基礎方程式が成り立つ古典物理学の一般的な性質である．アインシュタインの重力理論の場合，次の作用が最小値（正確に言えば停留値）を取るような時空が，宇宙定数 λ のアインシュタイン方程式の解となる．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(R - 2\lambda) \qquad (g \equiv \det g_{\mu\nu})$$

この式から予想されるように，スカラー曲率 R がゼロになる平坦で定常的な時空は，水の表面が平坦になる場合とは異なり，重力場が自然に向かうような特別の状態ではない．空間が自然に平坦に近づく理論としては，例えば，次のような作用を考えれば良い．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\cdot\frac{1}{R}$$

この理論では，$R=0$ が作用 S の特異点となり，空間は $R=0$ に漸近することが示される．R がゼロに近づく極限では，この作用からも，宇宙項のないアインシュタイン方程式と同じ方程式が導かれる．しかし，この作用では，宇宙の長期的な振舞いに関して，観測データと一致する結果にならないため，現実的な理論と見なすことはできない．

宇宙空間は，定量的に見てどれほど平坦なのだろうか？　イメージしやすいように，球面状空間で考えることにしよう．この場合，スケール因子 a は球面の半径に相当し，宇宙空間全体の大きさを表す．平坦さを定量的に示すには，長さの単位を持つ量がもう1つ必要になるが，ここでは，次式で定義される**ハッブル距離** l_H を考えることにする．

$$l_H = a/\left(\frac{1}{c}\frac{da}{dt}\right) = a/\dot{a} \tag{3.1}$$

3次元球面状空間の膨張を仮想的な4次元空間から眺めると，球の半径 a が増加している過程となる．この球面上に固定された（すなわち，共動座標の値が変化しない）2

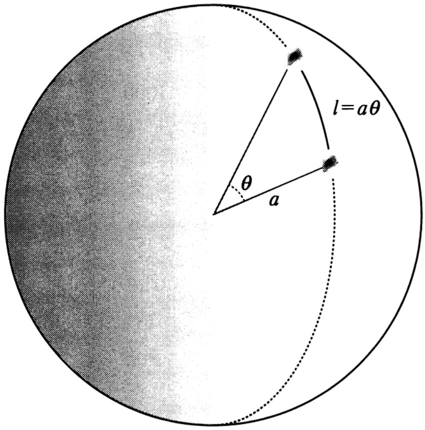


図 3-1　球面状空間での 2 点間の距離

つの点の間の距離 l は，4 次元球の表面における大円の弧長となり，弧と中心からなる扇形の頂角 θ に半径 a を掛けた値 $a\theta$ になる（図 3-1）．したがって，膨張によって弧長が増加する割合（$\theta da/dt$）は，弧長 $l = a\theta$ に c/l_H を乗じた値に等しい．銀河の固有運動を無視して，全ての銀河が球面状空間の特定の位置に固定されているとしよう．この場合，弧長が増大する割合は，ある銀河から別の銀河を（宇宙標準時で同一時刻になるように補正して）観測したときの後退速度 v に等しいので，v は次式で与えられる．

$$v = (c/l_H)\,l \tag{3.2}$$

これが，ハッブルとハマソンが 1930 年代に発見した銀河の距離－速度関係である．特に，比例係数 c/l_H の現在の値を**ハッブル定数**と呼ぶ（慣習上「定数」と呼んでいるが，比例係数 c/l_H は宇宙標準時の関数として変化する量である）．ハッブル定数の観測値は，70.5 ± 1.3 km/s · Mpc（Mpc は百万パーセクという距離の単位で，1 パーセク $= 3.26$ 光年），ハッブル距離に直すと約 138 億光年となる．

(3.2) 式からわかるように，ハッブル距離 l_H だけ離れた所（ハッブル限界）にある銀河の後退速度は，光速 c に等しい．ハッブル距離より遠くにある銀河の後退速度は光速を超えるが，これは，光速が自然界の最大速度となるという相対論の主張と矛盾しない．相対論とは，局所的な座標変換に対して物理法則が不変であることを要請する理論であり，最大速度としての光速は局所的な変換を行うときの上限であって，離れた 2 点の間

の空間が膨張する際の速度ではないからである．

宇宙空間が平坦であるとは，ハッブル距離に比べてスケール因子（球面状空間の半径）がきわめて大きいことを意味する．現在の観測データによれば，たとえ宇宙空間が球面状であるとしても，その半径はハッブル距離の 1000 倍よりも大きい．しかし，これだけならば，別に問題とされるほどのことではない．地平線までの距離に比べて地球の半径が充分に大きいと大地が平坦に見えるのと同じことで，単に宇宙空間の広大さを意味しているにすぎない．

平坦性が宇宙論の大問題である理由は，ビッグバン近くまで遡ったときに明らかになる．ハッブル距離 l_H に対するスケール因子 a の比の値が時間とともにどう変化するかを，フリードマン方程式を使って調べてみよう．話を簡単にするために，まず宇宙項のない場合（宇宙定数 $\lambda = 0$）を考える．ハッブル距離 l_H の定義式 (3.1) と第 1 章 (1.35) 式を使えば，次の式を得る．

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{l_H}\right) = \ddot{a} = -\frac{\dot{a}^2 + 1}{2a} < 0$$

（この式は宇宙項や圧力がない特殊なケースに限ったものなので，きちんとした議論を行うには，後で出てくる (3.10) 式を用いるべきである．）スケール因子の 2 階微分が負になるとは，膨張速度が減速することを意味しており，宇宙定数が小さく，宇宙空間に通常の原子や電磁波しか存在しないときには，一般に成り立つ．この条件が常に満たされていたとすると，ハッブル距離 l_H に対するスケール因子 a の比の値は，宇宙の初期から単調に減少してきたはずである．仮に，第 1 章 (1.38) 式が適用できるとすると，

$$\frac{a}{l_H} = \frac{1}{c}\frac{da}{dt} = \left(\frac{da}{d\tau}\right) \Big/ \left(\frac{d\,(ct)}{d\tau}\right) = \frac{a_0 \sin\tau}{a_0\,(1-\cos\tau)} \approx \frac{2}{\tau}$$

となり，$\tau \to 0$ として宇宙の初期に遡るにつれて，比の値はどこまでも大きくなる．現時点で a が l_H の 1000 倍以上だということは，宇宙初期には，この値が遥かに大きかったことを意味する．どれくらい大きかったかを定量的に評価するには，具体的な素粒子のモデルを使わなければならないが，どのモデルであっても，全ての原子がバラバラになって素粒子反応が宇宙を支配するようになる高温状態（例えば，10 兆 K 程度）にまで膨張宇宙の標準モデルを適用できるとするならば，この比は 20 桁以上になる．

ニュートン力学やマクスウェル電磁気学のような古典物理学では，「ある時刻の状態が与えられると，それ以降の時間変化は物理法則によって完全に決定される」という**法則的決定論**が成り立っている．重力場を量子化しない場合，一般相対論も同様の振舞いを示す．決定論の考えを宇宙全体に適用すると，現在の宇宙が観測される通りになった

原因は，宇宙の初期状態に求められる（この考えが誤っている可能性もあるが，ここでは議論しない）．現在の宇宙がかなり平坦であるのは，宇宙初期の高温状態において異常なほど平坦だったからということになる．この異常さの説明が付かないというのが平坦性問題であり，宇宙空間が減速膨張してきたと考える限り，解決しようがない．宇宙定数が正の大きな値ならば，途中から加速膨張になることもあり得るが，平坦性問題が解決できるほど長期にわたって加速膨張を続けてきたと仮定すると，宇宙の膨張速度が速くなりすぎて観測データと矛盾する．

平坦性問題は，別の形でも定式化できる．第 1 章 (1.45) 式のフリードマン方程式（宇宙定数 $\lambda = 0$ とする）において，第 1 章 (1.36) 式の物質密度 ρ と本章 (3.1) 式のハッブル距離 l_H を使うと，

$$\frac{1}{l_H^2} = \frac{\kappa\rho c^2}{3} - \frac{k}{a^2}$$

となる．平坦であるとは，右辺第 2 項が左辺に比べてきわめて小さいことである．ハッブル定数（現在の c/l_H の値）H_0 を使うと，右辺第 2 項がゼロだとしたときの（現在の）物質密度 ρ_c は，次式で与えられる．

$$\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 = \frac{\kappa\rho_c c^2}{3} \tag{3.3}$$

物質密度が ρ_c のとき空間は平坦になるので，この値を（曲率が正負いずれになるかの境目という意味で）**臨界密度**という．平坦性問題は，現実の物質密度が臨界密度に異常に近いという形でも表現できる．

§3-1-2　地平線問題

第 1 章では，「宇宙はどの場所でも同じような姿をしている」という宇宙原理を紹介した．この原理は，もともとは，宇宙全体を記述するモデルを考案する際の指導原理としてアインシュタインが導入したものだが，現在では，観測データによって支持されている．特に重要なのが，宇宙背景放射に関するデータである．

素朴に考えると，宇宙の一様性が最もわかりやすい形で現れるのは，銀河の分布のはずである．だが，銀河分布は，必ずしも宇宙原理が厳密に成り立つことを示す証拠にはならない．

1999 年からスローン・デジタル・スカイ・サーベイと呼ばれる銀河分布の調査が行われ，すでに億単位の銀河が調べられている．それによると，天の川銀河の近くにある銀河はかなり一様に分布しているものの，広範囲で見ると数億光年規模の超銀河構造も存在しており，完全に一様ではない．これは，重力の作用が，もともと存在した密度の

揺らぎを増幅させた結果である．物質密度がわずかに高い領域があると，そこに引きつける重量が周辺よりも大きくなるため，物質がいっそう集まって，銀河の分布に疎密が生じる．さらに，銀河そのものも進化する．若い銀河は形が不規則で小さなものが多いが，数十億年が経過すると，これらが合体して巨大な渦巻ないし楕円銀河が形成されていく．遠方になるほど光が到達するのに時間が掛かるため，天の川銀河から遠ざかるにつれて，観測される銀河の分布や種類は少しずつ変わっていく．

ややこしいことに，銀河までの距離を決定する確実な方法がないため，観測されているのがいつどこにあった銀河なのか，曖昧さが残ってしまう．現時点では，半経験的な方法といくつかの仮説を組み合わせながら，最も確からしい数値を導いているだけである．

こうした困難があるため，銀河分布のデータをもとにして，宇宙原理がどこまで成り立ち，そこからどの程度のずれがあるかを定量的に判定するのは難しい．そこで，宇宙がどの程度一様等方なのかを定量的に調べるのに，宇宙背景放射のデータが利用されることになる．

宇宙背景放射として精密に測定されているのは，全天から降り注ぐマイクロ波（波長がセンチメートルのオーダーの電磁波）である．このマイクロ波は，宇宙が高温だったときの名残とでも言うべきもので，ビッグバンから 40 万年ほど経ってから発せられ，そのまま宇宙を漂い続けた光である．それ以前の宇宙では，電子や陽子のような電荷を持った素粒子がプラズマ状態になって光の伝播を妨げていたので，その当時の光は観測できない．40 万年経って電子と原子核が結合して中性の原子が形成されて初めて，光がどこまでも伝播できるようになる．これを「**宇宙の晴れ上がり**」という．宇宙背景放射は，晴れ上がりの時期に放出された“最古の光”で，この光を発した場所が，観測可能な範囲の限界（**情報の地平線**）に当たる．

宇宙原理の 1 つの帰結は，どの方向を見ても宇宙は同じように見えることである．このため，どの方向からの宇宙背景放射も同じ分布になるはずである（観測者が共動座標に対して運動している場合は，ドップラー効果によって光の波長が変化して観測されるので，その分を補正しなければならない）．このことを如実に示すのが，WMAP のデータである．

WMAP（Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）とは，2001 年に打ち上げられた宇宙探査機で，地球軌道上のラグランジュ点と呼ばれる場所に位置し，全天から降り注ぐマイクロ波を測定した．得られたデータによると，マイクロ波背景放射の強度と波長の関係が温度 2.725 K の黒体放射の分布と良い精度で一致し，揺らぎがわずかしかない．黒体放射とは，熱平衡状態にある黒体（あらゆる波長の光を吸収する仮想的な物体）の熱放射であり，ビッグバンからしばらくの間は構造を持つ物質が存在しない高温の熱平

衡状態が実現されていたため，光の強度分布は黒体放射と同じになる．宇宙が晴れ上がると，この光がそのまま宇宙空間を進むことになるが，空間が膨張するために波長が引き伸ばされ，強度分布は温度が低いときのカーブにシフトしていく．宇宙膨張の標準モデルに基づく計算では，観測されるマイクロ波背景放射は数 K の黒体放射になることが導かれるので，WMAP のデータは（それ以前の COBE のデータなどとともに），ビッグバン理論をほぼ確証する．さらに，全天のどの方向を見ても（観測装置の運動を補正すると）温度の平均値と揺らぎが一致しており，宇宙原理がほぼ正確に成り立っていることがわかる．

しかし，ここで問題が生じた．あまりに一致が良すぎるのである．たとえ宇宙に特定の場所や向きがないとしても，温度は何らかのばらつきを示すはずである．にもかかわらず，天球の温度は，どの場所でも 1 万分の 1 未満の精度で一致している．これが地平線問題である．

ばらつきのない均一な温度分布は，熱平衡状態に達した熱浴などで一般的に見られるので，さほど不思議に思えないかもしれない．しかし，宇宙空間がフリードマン方程式に従って膨張している場合，事態はそれほど単純ではない．熱浴が熱平衡に達するまでには，熱伝導や対流という形で熱の移動が起こり，それによって温度分布が均一化されていく．ところが，最初の瞬間からフリードマン方程式が成り立っている場合，空間の広い範囲で温度を均一化するような相互作用は起こり得ないことが示される．

話を簡単にするために，曲率ゼロの平坦な空間の場合について，天の北極 N と南極 S の 2 点だけを考えることにしよう．この 2 点の方向からやってくる最古の光は，宇宙の晴れ上がりの時期に放出されたものである．この状況をわかりやすく図示するために，時間座標を，宇宙標準時 t から，次の式で定義される τ に変更する．

$$\tau = c\int_0^t dt' \frac{1}{a(t')} \tag{3.4}$$

新たな時間座標 τ と，共動座標 ξ（N と S を結ぶ 1 つの向きだけを考える）を使って，空間が平坦な場合の長さ要素 ds を表すと，次のようになる．

$$ds^2 = a^2(t)\left(-d\tau^2 + d\xi^2\right)$$

τ と ξ を直交座標で表すと，光の軌跡 $ds = 0$ は，各座標軸に対して 45° 傾いた直線となる．したがって，宇宙の晴れ上がりの瞬間に N と S から放出された光の軌跡は，図 3-2 のようになる．空間は共動座標で表しているので，宇宙空間に静止した光源や観測者の位置座標は変わらないが，原子時計やメートル原器を使って τ や ξ の 1 目盛りの大きさを計ると，τ の経過とともに変化することになる．

ここで重要なのは，宇宙の誕生 ($t=0$) から宇宙の晴れ上がりまでの τ の間隔が，晴れ上がりから現在までの間隔よりもずっと短いという点である．平坦で宇宙項のないフリードマン方程式（第1章 (1.45) 式で $\lambda=k=0$ と置いたもの）は，

$$\dot{a}^2=\frac{\kappa Mc^2}{3a} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{a}\frac{da}{dt}=\sqrt{\frac{\kappa Mc^2}{3}}$$

となり，a が t の 2/3 乗に比例することがわかる（この関係は，a が小さくなる極限では，空間が平坦でなくても成り立つ）．これより，τ と t の関係が

$$\tau \propto \int_0^t dt'\,(t')^{-2/3}=3t^{1/3} \tag{3.5}$$

と求められる（定係数は省略した）．宇宙標準時で表すと，宇宙誕生から晴れ上がりまでは 40 万年，晴れ上がりから現在までは 137 億年となり，時間間隔の桁が大きく異なるが，これを τ で表しても，誕生から晴れ上がりまでの方がずっと短いという状況は変わらない．図 3-2 は時間間隔の違いを正確に表してはいないが，実際には，誕生から晴れ上がりまでの間隔は図に描けないほど小さい．

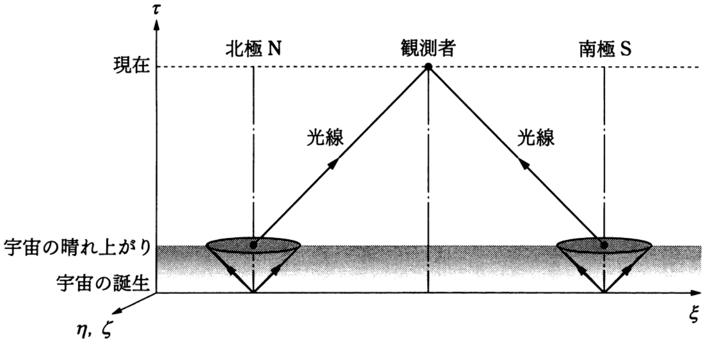


図 3-2 地平線問題

光速は自然界の最大速度なので，宇宙誕生の瞬間から晴れ上がりまでの間に N や S からの影響が及ぶ範囲は，図の円錐の底面に限られる．この図から明らかなように，N と S は，宇宙誕生の直後から，互いの影響が及ばない場所に位置しており，熱伝導などによって熱力学的な状態が均一化されるはずがない．均一化の過程がないとすると，天球の温度がどこでも等しい理由は，宇宙空間の温度がそもそもの初めから異常なほど均一

だったと仮定するしかない.

ここまでの議論は空間が平坦だと仮定したものだが，曲率がゼロでなくても，N と S が相互作用できないという結論は変わらない（具体的な計算は，巻末に掲げた宇宙論の参考書を見ていただきたい）．この結論は，フリードマン方程式と相対論の基礎だけを使って導かれたものなので，宇宙膨張の標準モデルを使う限り，変えることは難しい．地平線問題が宇宙論の基礎にかかわるとされる所以(ゆえん)である.

地平線問題を解決する 1 つの方法として提案されたのが，宇宙の晴れ上がりの時期と現在とでは光速が異なるという仮説である（この仮説については，マゲイジョ著『光速より速い光』（NHK 出版）で解説されている）．宇宙の晴れ上がり以前には光速が現在よりずっと大きいとすると，この時期の光線の傾きが現在に比べて小さくなるので，N と S が相手の影響が及ぶ範囲に入ることもあり得る．マクスウェル電磁気学が正しいならば，光が伝播する速さは相対論に現れる換算定数 c に等しいが，空間の状態が光の伝わり方を変えるような非正統的な理論もあり得るので，こうした主張もあながち誤りとは言えない．ただし，大部分の物理学者は，この考えを泡沫仮説として黙殺している.

3-2 節　インフレーションによる説明

平坦性問題と地平線問題は，宇宙が誕生の瞬間からフリードマン方程式に厳密に従って膨張してきたとする理論の不自然さを示す．宇宙空間がこんにち観測されているように平坦で一様であるためには，フリードマン方程式の初期条件として与えられる状態が，異常なほどに平坦で一様でなければならない.

この異常さを回避するにはいくつかの方法が考えられる．1 つの解決法が，フリードマン方程式が適用できるようになる以前に，急激な加速膨張の時期があったとするインフレーション理論である．「インフレーション」とは，急激な加速膨張を表すことばとして，理論の提案者の 1 人であるグースが採用したもので，印象的なネーミングが奏功して多くの人々に知られるようになった.

急激な加速膨張が平坦な空間をもたらし，平坦性問題を解決することを見てみよう．まず，議論の大筋をつかむために，第 1 章 (1.37) 式の球面状空間のフリードマン方程式において，質量 M がゼロだとした場合を考えてみよう（第 1 章 (1.39) 式）.

第 1 章 (1.39) 式の議論で記したように，スケール因子 a は時間とともに $a \propto \exp(+\alpha t)$

のように指数関数的に増大していく．このとき，a の時間微分も，同じく指数関数的に増大する．したがって，(3.1) 式で定義されるハッブル距離は，一定の値に保たれる．スケール因子が指数関数的に増大しているため，ハッブル距離に対するこの半径の比の値も指数関数的に増大し，空間は急速に平坦になっていく．インフレーションの継続時間を Δt として，$\exp(+\alpha\Delta t)$ の値が充分に大きくなれば，異常な平坦さは説明できる．

ただし，第 1 章 (1.39) 式のケースのように，宇宙定数 λ の効果で指数関数的な増大が起きるのでは，平坦性問題の解決にはならない．λ は定数なので，指数関数的な膨張は一度始まると止まることができず，現在でも続いているはずである．ところが，こんにち観測されている膨張速度は，当初から現在に至るまで指数関数的な膨張が続いていることを示していない．もし，指数関数的な膨張が続いていれば，銀河間距離はどんどんと大きくなり，観測可能な領域に銀河はほとんど残っていないはずである．

平坦性問題を解決するためには，宇宙が誕生して間もない頃に指数関数的な膨張（インフレーション）が起き，その後，インフレーションが終わって，フリードマン方程式に従う標準的な空間膨張に変わるとしなければならない．このように，膨張速度が変化するためには，インフレーションが宇宙定数 λ ではなく，ダイナミックに変化する別の暗黒エネルギーによって引き起こされねばならない．

地平線問題も，宇宙初期の一定期間だけインフレーションが起きたとすると解決できる．地平線問題が起きるのは，(3.4) 式で定義する時間 τ で表したとき，宇宙の誕生から晴れ上がりまでが，晴れ上がりから現在までよりもずっと短い場合である．ところが，インフレーションが起きると，晴れ上がりまでの時間が引き延ばされることが示される．

指数関数的なインフレーションによって，スケール因子 a が $\exp(+\alpha t)$ という形で増大する場合を考えよう．平坦性問題を解決するためには，a が 20 桁以上も膨れ上がることが要求されるので，インフレーション開始時の a は終了時に比べてきわめて小さい．このため，(3.4) 式の積分では，t が小さくなる側の寄与が支配的になる．これは，(3.5) 式に示されるように，標準モデルで t が小さいときの寄与が表に現れないのと反対である．インフレーション終了時のスケール因子を a_0 として，インフレーションの継続期間 Δt を時間座標 τ で表してみよう．

$$\Delta\tau = c\int_0^{\Delta t}\frac{dt'}{a_0\exp\left(\alpha\left(t'-\Delta t\right)\right)} = \frac{c}{a_0\alpha}\left(\exp\left(\alpha\Delta t\right)-1\right)$$

$\Delta\tau$ は巨大な値になるので，図 3-2 において，宇宙の晴れ上がり以前の時間が，晴れ上がりから現在までの時間より遥かに長く引き延ばされ，N と S が互いに影響を及ぼしあう範囲に入る．このため，インフレーション以前に，N と S の状態が均一化されるような過程が起こるようになる．

インフレーションを仮定すれば，平坦性問題と地平線問題を同時に解決することは可能である．しかし，このインフレーションは，宇宙初期の一定期間だけに起きるものであり，宇宙定数による加速膨張ではない．それでは，どうすれば“期間限定”のインフレーションを起こすことができるのだろうか？　この点を考察するには，もう少し詳しくアインシュタイン方程式の性質を調べる必要がある．

3-3 節　圧力項を含むアインシュタイン方程式

これまでは，式の形を簡単にするために圧力が働かない宇宙を考えてきた．これは，現在のように，宇宙空間の放射のエネルギーが小さく，大部分のエネルギーが天体による質量エネルギーだけになっている場合は，良い近似である．天体同士が押し合って圧力を及ぼすことがないからである．しかし，インフレーションは（もし実際に起こったとすれば）宇宙初期の出来事と考えられる．この頃は原子が存在せず，空間は放射のエネルギーに満ちあふれており，放射による圧力（放射圧）が大きかった．こうした場合には，圧力項を正しく評価しなければならない．

一様等方な宇宙空間での圧力項を含むエネルギー運動量テンソルは，流体の場合と同じように求めることができ，質量密度 ρ のほかに，圧力 p の項がテンソルの空間部分に現れる．

一様等方な宇宙空間で計量テンソルとして

$$g_{00} = -1, \qquad g_{i0} = g_{0i} = 0$$

となるものを選ぶと，エネルギー運動量テンソルの一般形は，次のように表される．

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_{ij} p \end{pmatrix}$$

太字で表した $\mathbf{0}$ は 3 成分全てが 0 であることを表し，μ と ν は 0 から 3 まで，i と j は 1 から 3 までの値を取る．この式の導出法はここでは述べないが，重力源が完全流体であると仮定し，流体が静止している座標系での質量密度を ρ，同じく圧力を p としたときの一般論から導かれる．球面状空間を仮定し，第 1 章のように原点での計量テンソル

$$g_{ij}(0) = a^2 \delta_{ij}$$

を使うと，後述の (3.8) 式の右辺が直ちに導かれる．

このエネルギー運動量テンソルの式にはスケール因子 a が入っているが，多くの教科書では，a を含まない混合テンソルの式としてエネルギー運動量テンソルを定義している．

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho}T_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

これを使ってアインシュタイン方程式（第 1 章 (1.28) 式）を求めると，時間成分は第 1 章 (1.34) 式と同じだが，空間成分には，(1.35) 式の代わりに右辺に圧力を含む式になる．球面状空間に限らない一般の一様等方宇宙を考察するために，k（空間曲率がゼロ，正，負のそれぞれの場合に対して，$k = 0, +1, -1$）をあらわに書いた 2 式を改めて記しておこう．

$$-\frac{3k}{a^2} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \lambda = -\kappa\rho c^2 \tag{3.7}$$

$$k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - a^2\lambda = -a^2\kappa p \tag{3.8}$$

この 2 つの式には，スケール因子 a，質量密度 ρ，圧力 p という 3 つの未知数が含まれている．このままでは，方程式の数が 1 つ足りず，全ての未知数を求めることができない．もう 1 つ必要となるのが，ρ と p の間の状態方程式である．熱力学的な状態方程式は，一般に単位体積当たりの内部エネルギーと圧力の関係式として与えられるので，ここでは，エネルギー密度 $\epsilon = \rho c^2$ と圧力 p の関係式を立てることにする．

良く知られているのが，理想気体の状態方程式である．気体分子運動論より，温度 T の単原子分子理想気体 1 モルの内部エネルギー（質量エネルギーは含まない）は $3/2RT$ となるので，単位体積当たりのエネルギー ϵ と圧力 p の関係は，モル体積を V として，

$$p = RT/V = \frac{2}{3}\epsilon$$

と求められる．また，マクスウェル電磁気学によれば，電磁波のエネルギー密度と圧力（放射圧）は，

$$p = \frac{1}{3}\epsilon$$

という関係で結ばれる．そこで，より一般的な状態方程式として

$$p = w\epsilon \tag{3.9}$$

を考えることにしよう（w は定数）．(3.9) 式は最も一般的な状態方程式ではないが，多くのケースを含んでおり，宇宙論を論じる際には役に立つ．これまで考えてきた圧力ゼロというケースは，$w=0$ の状態方程式を立てたことに相当する．

これらを使って，空間膨張の式を考えていこう．(3.7) 式を a^2 倍したものと (3.8) 式を 3 倍したものを加えあわせて整理すると，次の式を得る．

$$6a\ddot{a} = 2a^2\lambda - \kappa a^2 \left(\rho c^2 + 3p\right) \tag{3.10}$$

インフレーションの時期には，加速度が増加していく加速膨張になって，スケール因子 a が急激に増大する．$a>0$ なので，a の 2 階微分が正になるためには (3.10) 式の右辺が正でなければならない．質量密度や圧力が小さく，宇宙定数 λ が正のときは，確かに右辺は正になり加速膨張が起きる．しかし，これではインフレーションがいつまでも続き，宇宙は何もないほとんど空っぽの状態になってしまうので，λ は正であるとしても，ごく小さいと考えるべきである．λ が小さいにもかかわらず右辺が正になるには，どのような条件が満たされなければならないのか？

λ が充分に小さいとすると，(3.10) 式の右辺が正になるには，

$$\rho c^2 + 3p < 0 \tag{3.11}$$

が必要条件となる．ただし，質量密度 ρ は必ず正になると考えられているため，圧力 p は負でなければならない．(3.9) 式の状態方程式を仮定するならば，（$\epsilon = \rho c^2$ より）

$$w < -\frac{1}{3}$$

となる．

気体の熱力学では，負の圧力は存在しない．膨張するとき気体は外部に対して仕事を行い，この量だけ内部エネルギーが減少する．もし負の圧力を持つ気体が存在すると，膨張するほど内部エネルギーが増大し，それとともに圧力の大きさも増えるという奇妙な現象が生じる．分子間力によって自発的に収縮する粘着性の物質で負の圧力が発生することがあるが，膨張する性質のある流体では，通常，圧力が負になるとは考えられなかった．だが，宇宙論では，こうした奇妙な性質こそが必要なのである．

宇宙空間における熱力学の式は，(3.7) 式を a^3 倍して時間で微分したものから，(3.8) 式を使って 2 階微分の項を消去すると得られる．整理すると，次の式になる．

$$\frac{d}{dt}\left(\rho c^2 a^3\right) = -p\frac{da^3}{dt} \tag{3.12}$$

左辺の (　) 内は，1 辺 a の立方体に含まれるエネルギーになるので，共動座標系で表したときに一定の体積となる領域（各銀河が空間に固定されている場合は，複数の銀河

を取り囲む領域と考えて良い）に含まれるエネルギーを表しており，左辺全体はその時間変化となる．一方，右辺は，その体積の時間変化に圧力を掛けて符号を変えたものである．したがって，(3.12) 式は，熱力学でおなじみの熱力学第 1 法則

$$dU = -pdV + TdS$$

(U：内部エネルギー，p：圧力，V：体積，T：温度，S：エントロピー）において，熱量の移動を表す TdS をゼロと置いた断熱過程の式になっている．通常は圧力 p が正なので，膨張するにつれて内部エネルギーが減少するが，圧力が負になる場合は，内部エネルギーが増加する．

これまでは，宇宙項などいくつかの暗黒エネルギーを並べ上げるだけでその意味を説明しなかったが，ここで正確な意味を与えることができる．暗黒エネルギーとは，圧力が負になって加速膨張が引き起こされるようなエネルギーである．(3.9) 式の状態方程式を仮定すると，$w < -1/3$ が暗黒エネルギーの条件となる．

宇宙項は，エネルギー密度が λ/κ，圧力が $-\lambda/\kappa$ のエネルギー運動量テンソルと見なすことができる．(3.9) 式に当てはめると，$w = -1$ に相当するので，暗黒エネルギーの条件を満たしている．

宇宙項を混合テンソルの形で表すと，次のようになる．

$$-\frac{\lambda}{\kappa}g^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\lambda/\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda/\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda/\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda/\kappa \end{pmatrix}$$

これと (3.6) 式を比較すれば，エネルギー密度と圧力の値が得られる．

それでは，宇宙の初期に一定期間だけ加速膨張を引き起こすのは，どのような暗黒エネルギーなのだろうか？　あるところで加速膨張が止まらなければならないので，宇宙定数や零点エネルギーではない．とすると，宇宙に満ちている場のエネルギーの可能性が考えられる．そこで，第 2 章で紹介したスカラー場が一定期間の加速膨張を引き起こせるかどうかを調べてみよう．

3-4節　スカラー場のエネルギー運動量テンソル

第 I 部で述べたように，物理的な世界は，時空の計量を表す重力場と，物質を生み出

す量子場から構成されている．アインシュタイン方程式の右辺に現れるエネルギー運動量テンソルは，（宇宙項をエネルギー運動量テンソルに含めないならば）量子場によってもたらされる．

物理的世界の構成要素として，いったいいくつの量子場があるのか，現時点ではもはっきりしていない．素粒子の標準模型によると，クォークや電子，グルーオンなどの場が必要とされるが，観測データと矛盾しない限り，これ以外に場が存在してもかまわない．そうした場の 1 つが，第 2 章で紹介したスカラー場である．ここでは，このスカラー場が期間限定のインフレーションを引き起こす可能性を示すことにしよう（スカラー場以外の暗黒エネルギーについては，第 4 章で述べる）．

ミンコフスキ時空でのスカラー場の運動方程式は，第 2 章 (2.1) 式に与えた．すでに記したように，このときのスカラー場のエネルギー密度は，第 2 章 (2.4) 式となる．この式はミンコフスキ計量の場合であり，空間が膨張する場合には修正が必要となる．しかし，ロバートソン－ウォーカー計量（第 1 章 (1.44) 式）を用いるならば，修正が必要なのは空間微分の項だけであり，時間微分やポテンシャルの項は，空間が膨張するときにもそのままの形で成り立つ．空間微分の項は，スカラー場の変動を考えるときには重要になるが，量子場に関しても宇宙原理が成り立っており，スカラー場の値は全宇宙空間で一定だと仮定すると，空間微分の項はゼロと置ける．このような一様なスカラー場では，第 2 章 (2.4) 式のエネルギー密度は次式で置き換えられる．

$$\epsilon = \hbar c \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi) \right\} \tag{3.13}$$

(3.13) 式は，1 個のバネにおもりをつなげた調和振動子のエネルギーの式と同じ形をしている．特に｛　｝内第 2 項のポテンシャルエネルギーに注目しよう．ここで重要なのは，空間が膨張しても，ポテンシャルエネルギーは変化しないことである．空間微分があると，その項にはスケール因子が掛かっているため，空間が膨張する際には，エネルギー密度が減少する．しかし，空間が膨張しても，スカラー場の値が変わらなければ，ポテンシャルエネルギーの値そのものは変動しない．膨張しても変化しないという点で，ポテンシャルエネルギーは宇宙定数 λ に似ているが，定数ではない．スカラー場 ϕ の値が変化すれば，$U(\phi)$ も変化する．宇宙定数と似たような性質を持つがダイナミックに変動できるということで，期間限定のインフレーションを引き起こす可能性が出てくるのである．

実際にスカラー場がインフレーションを引き起こすかどうかを調べるためには，スカラー場のエネルギー運動量テンソルを求める必要がある．具体的な計算法は第 4 章で示すことにして，ここでは，圧力に相当する項がどうなるかを記しておく．エネルギー密

度の場合と同じく，空間微分をゼロと置いたときのスカラー場の圧力は，次式で与えられる．

$$p = \hbar c \left\{ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi) \right\} \tag{3.14}$$

スカラー場のエネルギー運動量テンソルを混合テンソルの形で書くと，次のようになる．ただし，式を簡単にするために，単位を揃える定数 $\hbar c$ は落としている．

$$T^{\mu}_{\nu} = -\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\partial^{\rho}\phi\partial_{\rho}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}U(\phi) + \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi \tag{3.15}$$

ここで，スカラー場の空間微分はゼロとし，

$$\partial^0\phi = -\partial_0\phi$$

などに注意して式を変形すると，エネルギー密度と圧力の式が得られる．

(3.13) 式と (3.14) 式からわかるように，加速膨張が起きる条件 (3.11) が満たされるのは，

$$\epsilon + 3p = 2\hbar c \left\{ \dot{\phi}^2 - U(\phi) \right\} < 0$$

すなわち，

$$\dot{\phi}^2 < U(\phi)$$

となるときである．このとき，スカラー場のエネルギーは暗黒エネルギーとして振舞い，加速膨張を引き起こす．しかも，スカラー場は時間変化しているので，この条件が破れて，インフレーションが一定期間だけ持続した後に終了することも可能になる．

このように，変化するスカラー場の効果で宇宙初期に加速膨張が起きたとすると，平坦性問題と地平線問題を解決することができると期待される．これがインフレーション理論である．

3-5 節　初期のインフレーション理論とその改訂

インフレーションを引き起こすスカラー場とは何だろうか？　実は，素粒子の標準模型や，これを超えるアイデアとして提案された大統一理論などにも，ヒッグス場と呼ば

れるスカラー場が含まれている．ヒッグス場は，宇宙の初期に空間全域に凝縮し，場の値がゼロの真空からゼロでない真空への相転移を引き起こす．こうして空間内部に瀰漫（びまん）するようになったヒッグス場が，他の場における波動の伝播に影響を及ぼす結果として，電子やクォークなどの素粒子に質量が生じたと考えられている．もともとのインフレーション理論とは，大統一理論のヒッグス場が素粒子に質量をもたらすだけでなく，宇宙空間のインフレーションを引き起こしたというものだった．この理論は，1980 年前後にグースを初めとする何人かの物理学者によって独立に提唱され，大きな反響を呼んだ．

インフレーション理論が反響を呼んだ理由は，何よりも，そのシンプルさにある．インフレーションを引き起こすためのスカラー場を新たに仮定するのではなく，すでに理論に含まれている場だけを使って，宇宙の進化を簡単に説明してみせたのである．

残念ながら，このシンプルなアイデアは，その後の研究でほぼ否定されることになる．ヒッグス場の詳細は本書の範囲を超えるので，第 5 章（および第 9 章）で触れるだけにとどめて詳しい説明は行わないが，簡単に言えば，ポテンシャルエネルギーの形が素粒子の理論や実験から制約を受けており，この制約と平坦性問題・地平線問題を解決するためのインフレーションとを両立させることが難しいためである．

現在では，インフレーションを引き起こすスカラー場として，ヒッグス場とは別にインフラトン場と呼ばれる場を想定している．ヒッグス場には素粒子論からさまざまな制約が課せられるが，勝手に導入したインフラトン場ならば，理論的な制約はあまりない（超対称性理論のように，その理論固有の制約が付く場合もある）．さらに，素粒子実験によっても，スカラー場が生成する素粒子はほとんど見つかっていない．2012 年までに見つかった唯一のものは，CERN（欧州素粒子原子核研究機構）の LHC（大型ハドロン衝突型加速器）で見つかったヒッグス粒子らしきものだけである．したがって，インフラトン場の素粒子も，質量の値や反応パターンがこれまで行われた実験では見つけられない範囲にあるという条件さえ満たせば，かなり自由にモデルを構築することが許される．

インフレーション理論が印象的だったのは，宇宙の初期に起きる一連の変化によって，現在観測されている宇宙と素粒子の基本的な枠組みができあがったというシンプルさだった．しかし，ヒッグス場によるインフレーションというアイデアが放棄された時点で，このシンプルさは失われてしまい，宇宙と素粒子では別のメカニズムが働いたことにされた．しかも，インフラトン場にはあまり制約が付かないので，都合の良いシナリオが実現されるようにポテンシャルをあつらえてもかまわない．こうして，やや場当たり的にさまざまなインフレーション理論が次々と提唱されることになった．

3-6節 インフレーション理論の展開

インフラトン場によってインフレーションが起きるとすると，ヒッグス場による場合と異なり，ビッグバンとインフレーションの先後関係が変更される．古いインフレーション理論では，まずビッグバンによって熱い宇宙が誕生し，膨張する途中でインフレーションが起きる．このとき，宇宙の温度はいったん急激に低下するが，インフレーションが終了してインフラトン場に蓄えられていたエネルギーが放出されると，再び宇宙は熱くなる．しかし，新しいインフレーション理論では，インフレーションの前についてはほとんど手がかりがなく，インフレーションが起きている宇宙から話を始めることが多い．この場合，インフレーションが終了してインフラトン場のエネルギーが放出されると，宇宙が加熱されて熱い状態になる．最近では，この再加熱の時期をビッグバンと呼ぶのが一般的なので，インフレーションはビッグバンの前に起きたことになる．

新しいインフレーション理論では，インフラトン場のポテンシャルに制限はほとんど付かない．このため，さまざまなポテンシャルを仮定して，都合の良いシナリオを考案することもできる．最も単純な形は図 3-3 のようなものだが，図 3-4 のようにポテンシャルの途中にくぼみをつけると，一時的にこの状態が長く続くため，インフレーションの起き方に変化が生じる．ポテンシャルのヴァリエーションについては第 5 章で簡単に取り上げることにして，ここでは，最も単純なポテンシャルを仮定して，インフレーションがどのように起きるかを見ることにする．

インフラトン場 ϕ が時間とともにどう変化するかを式で考えよう．

重力場の基礎方程式であるアインシュタイン方程式は，一様等方宇宙の場合，時間成分の (3.7) 式と空間成分の (3.8) 式になるが，(3.8) 式はスケール因子 a の 2 階微分を含んでいて扱いにくいので，(3.8) 式の代わりに，この 2 つの式から作った熱力学第 1 法則を表す (3.12) 式を用いることにする．まず，(3.12) 式を次のように書き換えよう．

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\epsilon + p) = 0$$

式を簡単にするため，(3.1) 式で与えられたハッブル距離 l_H の逆数をハッブルパラメータ H と定義する．ハッブルパラメータは時間の関数であり，その現在の値がハッブル定数である．

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{3.16}$$

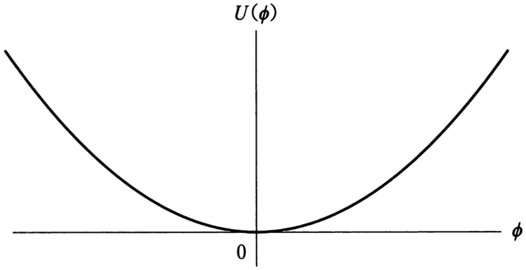


図 3-3　インフラトン場のポテンシャル (1)

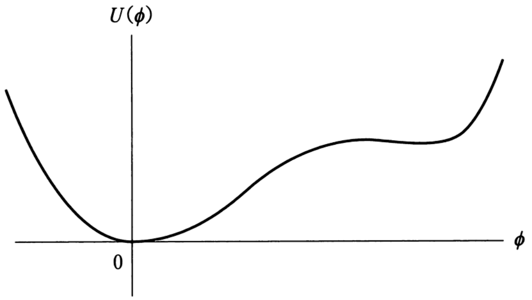


図 3-4　インフラトン場のポテンシャル (2)

H を使うと，(3.12) 式は，

$$\dot{\epsilon} + 3H\,(\epsilon + p) = 0$$

という簡単な式になる．インフレーションの時期には重力場以外にはインフラトン場だけ考えれば充分なので，ϵ と p を表す式として (3.13) 式と (3.14) 式を使うことにする．これより，

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U\,(\phi)\right\} + 3H\dot{\phi}^2 = 0$$

となる．

ここで微分を実行して整理すれば，次式を得る．

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -U'\,(\phi) \tag{3.17}$$

厳密な議論では，アインシュタイン方程式のもう 1 つの式である (3.7) 式にエネルギー密度 ϵ を表す (3.13) 式を代入し，これと (3.17) 式と連立させて，スケール因子 a とインフラトン場 ϕ について時間変化をきちんと求めなければならない．だが，インフレーションの定性的な振舞いを見るだけならば，もう少し簡便な方法がある．

3-2 節で述べたように，スケール因子 a が $a = \exp(+\alpha t)$ という形で変化する場合は，ハッブル距離 l_H やその逆数のハッブルパラメータ H は一定になる．インフラトン場によるインフレーションでは，α は定数ではなくなるので，H は一定ではない．しかし，その変化がゆっくりしたものならば，近似的な議論が可能になる．

水のような粘性抵抗のある流体の内部で，粒子がポテンシャルエネルギーの傾きに比例する力を受けながら運動する場合を考えよう．粘性抵抗は粒子の速さに比例するので，その比例係数を η と書くことにする．粒子の位置（1 次元）を x とし，質量 m，ポテンシャルエネルギー $U(x)$ とすると，運動方程式は次の形になる．

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} = -U'(x)$$

これと (3.17) 式を見比べればわかるように，インフラトン場の振舞いは，粘性流体中で運動する粒子の位置の変化と良く似たものになるはずである（ただし，(3.17) 式の H は定数ではないことを忘れないように）．ポテンシャルからの作用が小さい場合，粘性流体中の粒子はすぐに一定の速度で運動するようになる．例えば，水中に砂粒のような微粒子が落ちたときには，数秒で一定の終端速度に達する．これと同じように，インフラトン場も，インフレーションが始まるとすぐに，ほぼ一定の割合で時間変化するようになると仮定しよう．このとき，時間に関する 2 階微分はゼロと置けるので，(3.17) 式は次のように書き換えられる．

$$\ddot{\phi} \approx 0,\ \dot{\phi} \approx -\frac{U'(\phi)}{3H} \tag{3.18}$$

この条件を満たしながら，インフラトン場がゆっくりと時間変化する過程を考える．この過程は，ポテンシャルの坂道をゆっくり転がり落ちるというイメージに基づいて，スローローリングと呼ばれる．スローローリングは，ポテンシャルの傾きが充分に緩やかならば実現される（ヒッグス場を使う場合とは異なり，新しいインフレーション理論でポテンシャルの形をいろいろと選べる強みである）．

古いインフレーション理論では，インフレーションが長く続かず（あるいは，逆に途中で止めることができず），うまくいかなかった．しかし，新しいインフレーション理論では，スローローリングが起きている間はずっとインフレーションが持続するため，宇宙空間は平坦性問題や地平線問題を解決するのに充分なだけ膨張する．

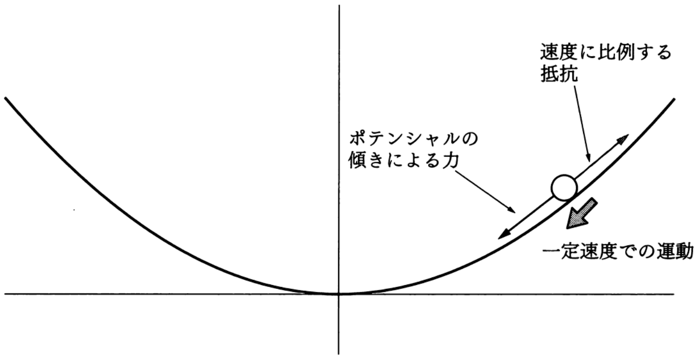


図 3-5　スローローリング

ポテンシャルエネルギーが図 3-5 のような形状の場合，ϕ がほぼ一定の割合でゆっくり変化するにつれて，$U'(\phi)$ も小さくなっていき，(3.18) 式に従って H もゆっくりと減少する．(3.16) 式からわかるように，スケール因子 a は，

$$a(t) = a(t_0)\exp\left(c\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right)$$

のように変化するが，H がゆっくり変化している間は，指数関数に近い形で膨張していく．

ポテンシャルの底に近づくにつれて H の値は小さくなるが，これは粘性抵抗が消失して滑らかに動けることに対応するため，底付近で振動することも起こり得る．このとき，インフラトン場に蓄えられていたエネルギーが放出され，宇宙空間は加熱されてビッグバンの高温状態になる．

このように，インフラトン場のポテンシャルが“適当な”形をしていれば，平坦性問題や地平線問題を解決し，観測データとも矛盾しないインフレーションが引き起こされる．さらに，ポテンシャルなどインフラトン場の特性をいろいろと変えることによって，さまざまなインフレーション理論の改訂版を作ることも可能であり，数多くの論文が執筆されている．こうした状況は，研究が活況を呈しているようにも見えるが，インフラトン場の特性を定める指導原理が見いだせずに混迷しているという見方ができなくもない．

さまざまなインフレーション理論と，現在進行中の加速膨張に関する議論は第 5 章で

説明するが，その前に，多くの読者が感じていたであろう疑問について，もう少し踏み込んでみたい．そもそも暗黒エネルギーとは何かという疑問である．

第 4 章

暗黒エネルギーとは何か

暗黒エネルギーは，一般に知られているエネルギーとかなり異なっている．通常のエネルギーは「何らかの仕事を行う活力源」と見なすことができ，外部に仕事をすると，最初にあったエネルギーは減少する．ところが，暗黒エネルギーは，宇宙空間の加速膨張を引き起こすにもかかわらず，そのエネルギー密度はほとんど変化しない．まるでエネルギー保存則が破れているかのようである．数式のない啓蒙書などを通じて暗黒エネルギーの知識を得た人は，宇宙空間には神秘的なエネルギーが無尽蔵に潜んでいると思っているかもしれない．

しかし，これは誤解である．空間が膨張するにもかかわらずエネルギー密度が減少しないのは，暗黒エネルギーの特性と言うよりは，一般相対論の形式に由来する．この点を正しく理解するためには，そもそもエネルギー保存則がなぜ成り立つかを明らかにする必要がある．本章では，こうした観点から，ネーターの定理を用いてエネルギー保存則を導き出し，暗黒エネルギーが神秘的なものではないことを明らかにしたい．

4-1 節　保存則と対称性

エネルギー保存則が確立されるまでには，長い歴史がある．保存力（ポテンシャルから導ける力）だけが作用しているときのエネルギー保存則なら 17 世紀から知られていたが，熱伝導や化学反応まで含むあらゆる過程でエネルギーの総量が保存するというアイデアは，19 世紀の段階でも推測にすぎなかった．この時期には，さまざまに姿を変えながらも総量は保存する根源的な実体としてエネルギーを想定する思想家もあった．こうした不正確なエネルギー理解は，こんにちでも，物理学をきちんと勉強していない人の間に見られる．

エネルギーの物理学的な意味が解明されたのは，20 世紀初頭に女性数学者ネーターが，いわゆる**ネーターの定理**を見いだしたときである．彼女は，あるシステムに連続的

な対称性が存在すると，それに対応して保存則が存在することを数学的に示した．粒子の運動の場合，時間をずらしても運動法則が変わらないという「時間に関する並進対称性」から導かれるのが，エネルギーの保存則である．この定理によって，総量が一定となるような実体的な何かを想定する必要のないことが明らかになった．物理として本質的なのは時間に関する並進対称性であり，この対称性さえあれば，いくつかの物理量を組み合わせることによって，保存する量を定義することが可能になるのである．

ネーターの定理を使うと，エネルギー以外の保存量も作ることができる．空間に関する並進対称性から運動量保存則，回転対称性から角運動量保存則，ゲージ変換（電磁気学などのゲージ理論における変換）に関する対称性から電荷の保存則が導かれる．

ネーターの定理は，物理学における最も重要な定理の 1 つだが，大学の授業などで充分に解説されているとは言い難い．ここでは，まず粒子の運動にネーターの定理を応用する方法を説明し，その後で，暗黒エネルギーにかかわるスカラー場の理論に進むことにしよう．

4-2 節　粒子の運動とネーターの定理

ポテンシャルからの作用を受けて直線上を運動する粒子を考える．粒子の位置を q，ポテンシャルを $U(q)$，質量を μ とすると，ニュートン力学における運動方程式の解は，第 2 章 (2.8) 式の作用 S を最小にする経路となる．この作用の被積分関数——作用の被積分関数を表す一般的用語を使えば**ラグランジアン**——を，改めて書いておこう（他の参考書と比較しやすくするために，この 4-2 節の議論に限り，ドットによって c の付かない時間微分を表すことにする）．

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\mu}{2}\dot{q}^2 - U(q) \tag{4.1}$$

最小作用の原理から運動方程式を導く方法については，すでに知っている読者も多いと思われるので，ごく簡単に説明する．

時刻 $t = 0$ で $q = 0$ にあった粒子が，時刻 $t = T$ に $q = Q$ に移動しているケースを取り上げる．運動方程式の解として実現される経路 $q(t)$ のとき作用 S は最小値 $S[q(t)]$ を取り，それ以外の経路に対して，S の値はこれより大きくなる．

ここで，解となる $q(t)$ からのずれが微小量だとしよう．微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ のとき最小値を取るならば，導関数 $f'(x)$ は $x = x_0$ のときゼロとなり，x_0 から微小量 δx だけずらしたときの変化量 $f(x_0 + \delta x) - f(x_0)$ は，δx の 1 次の範囲でゼロとなる．これと同じように，ある経路 $q(t)$ のときに S が最小値を取るならば，これから

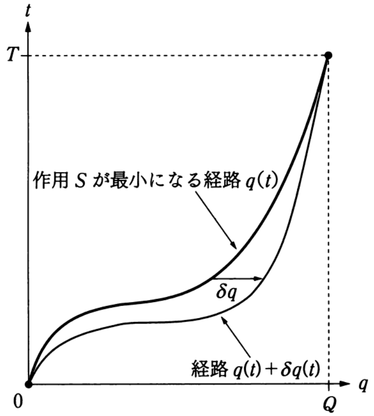


図 4-1　粒子の理論における最小作用の原理

微小量 $\delta q(t)$ だけずらして $q(t)+\delta q(t)$ に経路を変えたときの作用 S の変化は（$\delta q(t)$ の 1 次の範囲で）ゼロとなる．

この作用の変化を式で表そう．

$$\begin{aligned}\delta S &= S[q+\delta q]-S[q]\\ &= \int_0^T dt\,\{L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q})-L(q,\dot{q})\}\\ &= \int_0^T dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right\}\end{aligned}\tag{4.2}$$

ここで，

$$\delta\dot{q}=\frac{d\delta q}{dt}$$

という関係を使って，(4.2) 式右辺の第 2 項を部分積分する．

$$\delta S=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_0^T+\int_0^T dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\}\delta q\tag{4.3}$$

$t=0$ で $q=0$，$t=T$ で $q=Q$ という境界条件があるので，時刻の両端では $\delta q=0$ であり，(4.3) 式右辺第 1 項はゼロとなる．任意の δq に対して $\delta S=0$ でなければならないので，右辺第 2 項の｛　｝内はゼロになる．したがって，次の方程式が成立する．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{4.4}$$

これが，**ラグランジュ方程式**（または，**オイラー - ラグランジュ方程式**）と呼ばれる基本方程式である．(4.1) 式のラグランジアンを使うと，第 2 章 (2.2) 式の運動方程式が得られる．

ここからネーターの定理の説明に移ろう．

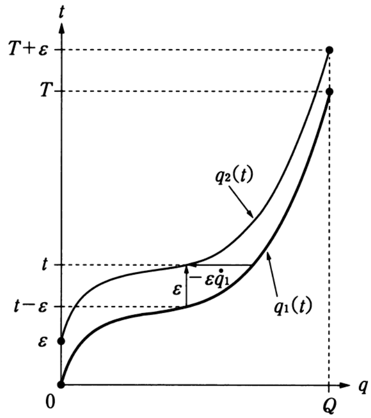


図 4-2　粒子の理論におけるネーターの定理

時間が経過しても粒子の運動法則は変わらない——すなわち，時間の並進に対する対称性がある——ものとする．ラグランジアンが (4.1) 式で与えられる場合は，ポテンシャル $U(q)$ が時間に依存しなければ，時間が経過しても運動法則は変わらない．時間が経っても運動法則が変わらないのだから，ラグランジュ方程式の解を時間方向にずらしたものも，やはり方程式の解になる．したがって，$t=0$ で $q=0$，$t=T$ で $q=Q$ という境界条件を満たすラグランジュ方程式の解を $q_1(t)$ とすると，$t=\varepsilon$ で $q=0$，$t=T+\varepsilon$ で $q=Q$ となる解 $q_2(t)$ は，$q_1(t)$ を時間方向に ε だけずらしたものに等しい．式で書くと，次のようになる．

$$q_2(t) = q_1(t-\varepsilon) = q_1(t) - \varepsilon\dot{q}_1(t) + O(\varepsilon^2) \tag{4.5}$$

式を見やすくするために，同じ時刻 t での 2 つの経路の差を $\chi(t)$ と書くことにしよう．

$$\chi(t) = -\varepsilon\dot{q}_1(t) + O(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

2 つの経路は互いに時間方向にずらしただけのものなので，それぞれの経路に対する作用は等しい．

$$S[q_1] = S[q_2]$$
$$S[q_1] = \int_0^T dtL(q_1, \dot{q_1})$$
$$S[q_2] = \int_\varepsilon^{T+\varepsilon} dtL(q_2, \dot{q_2})$$

定積分の範囲に関しては，次の恒等式が成り立つ．

$$\int_\varepsilon^{T+\varepsilon} = \int_0^T + \int_T^{T+\varepsilon} - \int_0^\varepsilon$$

これを使えば，作用の差は次のようにまとめられる．

$$S[q_2] - S[q_1] = \int_0^T dt\left\{L\left(q_1(t)+\chi(t), \dot{q_1}(t)+\dot{\chi}(t)\right) - L\left(q_1(t), \dot{q_1}(t)\right)\right\} + \int_T^{T+\varepsilon} dtL(q_2, \dot{q_2}) - \int_0^\varepsilon dtL(q_2, \dot{q_2}) \tag{4.7}$$

(4.7) 式の右辺第 1 項は，χ を δq に読み替えれば，(4.2)，(4.3) 式と同じように変形することができる．ただし，(4.2)，(4.3) 式とは異なり，$q_1(t)$ はラグランジュ方程式 (4.4) の解なので，(4.3) 式の第 2 項に対応する項はゼロとなるが，χ は δq のように境界でゼロにならないため，(4.3) 式第 1 項に対応する項は残る．

また，(4.7) 式右辺の第 2 項と第 3 項は，次の関係式を使って書き換えることができる（この関係式は，ε が微小だとすれば直ちに得られる）．

$$\int_T^{T+\varepsilon} dtL(q_2, \dot{q_2}) - \int_0^\varepsilon dtL(q_2, \dot{q_2}) = \varepsilon\int_0^T dt\frac{d}{dt}L(q_1, \dot{q_1}) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.8}$$

以上をまとめると，(4.7) 式は次のようになる．

$$S[q_2] - S[q_1] = -\varepsilon\int_0^T dt\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L(q_1, \dot{q_1})}{\partial \dot{q_1}}(\dot{q_1}) - L(q_1, \dot{q_1})\right\} + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.9}$$

2 つの作用が等しいことから，被積分関数に現れる｛　｝の時間微分はゼロになる．したがって，次式で定義される量 E は時間が経っても変化しない保存量となる．

$$E = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L(q, \dot{q})$$

これが，**エネルギーの定義**である．(4.1) 式のラグランジアンを使うと，

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{q}\right)^2 + U\left(q\right)$$

となり，よく知られたエネルギーの式（第 2 章 (2.3) 式）となる．

こうした導き方からわかるように，総量一定のエネルギーなる量が実体として存在する訳ではない．「連続的な対称性さえあれば，保存する量を定義できる」というのがネーターの定理の意味するところであり，エネルギーは，時間に関する並進対称性から導かれる保存量であるにすぎない．

> ネーターの定理の基礎にあるのは，経路 q_1 の作用 $S[q_1]$ と，この経路を時間方向に移動した——一般には，ある変換を施した——経路 q_2 に対する作用 $S[q_2]$ が，対称性のために等しくなることである．作用が等しいという関係自体は，経路がラグランジュ方程式の解でなくても成り立つので，ネーターの定理を量子論に拡張することも可能である（量子論では，作用を最小にするラグランジュ方程式の解だけでなく，それ以外の経路も重ね合わせることを思い起こされたい）．量子論の場合，不確定性原理のせいでエネルギーが確定した値を取るとは限らないため，期待値が一定に保たれるという形式での保存則になる．

4-3 節　スカラー場とネーターの定理

粒子の運動の場合，時間積分の両端の寄与からエネルギー保存則が導かれた．この議論は，何個かの粒子が相互作用しながら運動するシステムに拡張することもできる．しかし，宇宙論になると，問題が少し複雑になる．宇宙論が対象とするのは，4-2 節で扱った粒子の理論ではなく場の理論なので，時間の他に空間の境界も考えなければならないからである．結果的に，場の理論におけるエネルギー保存則は，時間と空間を含む微分の形で定義される．ここでは，保存則の具体的な形を，スカラー場の理論を使って導いてみよう．ただし，時空のゆがみまで考慮すると，学部レベルの数学では手に負えなくなるので，平坦で定常的な時空に限定し，ミンコフスキ計量を使うことにする．

スカラー場の基礎方程式としては，第 2 章 (2.1) 式を考える．この基礎方程式が，次のラグランジアン密度（空間座標で積分するとラグランジアンになる量）から導かれるラグランジュ方程式となることを示そう．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U\left(\phi\right) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - U\left(\phi\right) \qquad (4.10)$$

なお，以下の議論は最小作用の原理に基づいて関係式を導くだけなので，単位を整えるために全体に付ける定係数は省略した．

まず，場の理論と粒子の理論がどのような関係にあるかを見るために，いったん空間（1 次元とする）を離散化し，微分を差分で置き換えてみよう．整数 i で場所を指定し，そこでのスカラー場を $\phi_i(t)$ と書くことにすると，ラグランジアン密度の空間積分は，次のように書き換えられる．

$$\int dx\mathcal{L} \quad \to \quad \sum_i \left\{ \frac{1}{2c^2}\left(\frac{d\phi_i(t)}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2l^2}\left(\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)\right)^2 - U(\phi_i) \right\}$$

ただし，l は i と $i-1$ で指定される 2 地点の空間的な距離である．この式と，(4.1) 式で表される粒子のラグランジアンを見比べればわかるように，スカラー場の変動は，位置を ϕ_i で表した無限個の粒子の運動と見なすことができる（第 2 章でも述べたが，粒子の理論から場の理論に移行する場合，粒子の位置 q は場の強度 ϕ に置き換えられるのであって，空間座標 x になる訳ではない）．ただし，この無限個の粒子には，ポテンシャル U からの力だけではなく，隣り合う粒子の位置の差から生じる力が加わる．したがって，最小作用の原理に基づいてラグランジュ方程式を導くには，(4.2)〜(4.4) 式の議論を，互いに作用を及ぼしあう無限個の粒子（きちんとした物理学用語を使えば「無限自由度」）の場合に拡張すれば良い．

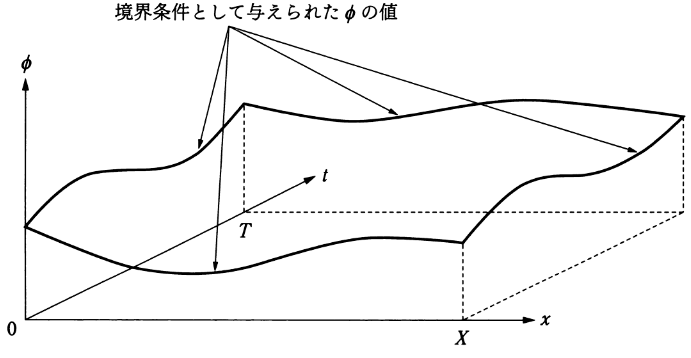


図 4-3　場の理論における最小作用の原理

再び連続理論に戻って，(4.2) 式と同じように，ϕ を少し変えても作用 S が変わらないという式を書くことにしよう（式を簡単にするために，空間は x 座標のみとする）．時

間 t は 0 から T まで，空間 x は 0 から X までの範囲を考え，図 4-3 に示したように，$t=0$ と $t=T$，$x=0$ と $x=X$ で ϕ の値が与えられるという境界条件を採用する．ラグランジアン密度を ϕ とその時間および空間微分の関数として表すと，ϕ を $\phi+\delta\phi$ に変えたときの作用の変化は次式で表される．

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_0^{cT} d\,(ct) \int_0^{X} dx \left\{ \mathcal{L}\left(\phi+\delta\phi, \frac{\partial\,(\phi+\delta\phi)}{\partial\,(ct)}, \frac{\partial\,(\phi+\delta\phi)}{\partial x}\right) - \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial\,(ct)}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right\} \\ &= \int_0^{cT} d\,(ct) \int_0^{X} dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial(ct)}\right)} \frac{\partial\delta\phi}{\partial\,(ct)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)} \frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.2) 式から部分積分によって (4.3) 式を導いたのと同じように，(4.11) 式を部分積分することができる（式が長く煩雑になるので，すぐにわかるところは $\cdots$ で表した）．

$$\begin{aligned}\delta S = &\left[\int_0^{X} dx \cdots \delta\phi\right]_{t=0}^{t=T} + \left[\int_0^{cT} d\,(ct) \cdots \delta\phi\right]_{x=0}^{x=X} \\ &+ \int_0^{cT} d\,(ct) \int_0^{X} dx \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\,(ct)}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial(ct)}\right)}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}\right)\right\}\delta\phi \end{aligned} \tag{4.12}$$

(4.3) 式では $t=0$ と $t=T$ で δq がゼロになるという条件を使ったが，今度は，時間 t と空間 x の端でともに $\delta\phi$ がゼロになるという境界条件を採用しているので，(4.12) 式の右辺第 1 項と第 2 項はゼロになる．したがって，任意の $\delta\phi$ に対して δS がゼロであるためには，第 3 項の $\{\ \ \}$ 内がゼロにならなければならない．

空間の次元数を 3 に戻し，

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

という記法を用いて $\{\ \ \}$ 内がゼロになるという式を表すと，

$$\partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_0\phi)} + \partial_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_1\phi)} + \partial_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_2\phi)} + \partial_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_3\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

となる．これが，スカラー場のラグランジュ方程式である．分母にある下付の添字は全体として見ると上付の添字と同じものになるので，上下に同じ記号が現れたときには足しあげるという規約を使うことにすると，(4.13) 式は，次の簡単な形にまとめられる．

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{4.13}$$

(4.10) 式のラグランジアン密度を使えば，(4.13) 式のラグランジュ方程式は第 2 章 (2.1) 式と同じものになることがわかる．

さて，ここからが本論となる．このスカラー場の理論にネーターの定理を当てはめてみたい．ネーターの定理によれば，連続的な対称性があると，それに対応する保存量が存在するはずである．改めて (4.10) 式のラグランジアン密度を見ると，時間と空間の座標を（ϕ の引数としてではなく）あらわに含んでいないことに気づく．これは，(4.1) 式のラグランジアンが時間 t を含んでおらず，時間をずらしても同じ物理法則が成り立っているのと同様に，時間と空間をずらしても同じ物理法則が成り立つことを意味する．したがって，スカラー場の理論には，時間・空間に関する並進対称性があることになる．

ここで，ラグランジュ方程式の解を 2 つ考える．1 つは，時間・空間の範囲を

$$x^\mu = 0 \sim X^\mu$$

とし，各座標の両端で境界条件を与えたときの解 ϕ_1．もう 1 つは，時間・空間の範囲を境界条件ごと ε^μ だけずらしたときのラグランジュ方程式の解 ϕ_2 である．(4.10) 式のラグランジアン密度が時間・空間に関して並進対称性を持つことから，2 つの解は，座標がずれただけで同じ形になるはずである．したがって，粒子の運動における (4.5) 式と同じように，ϕ_2 は ϕ_1 を図 4-4 のように平行移動したものになる．

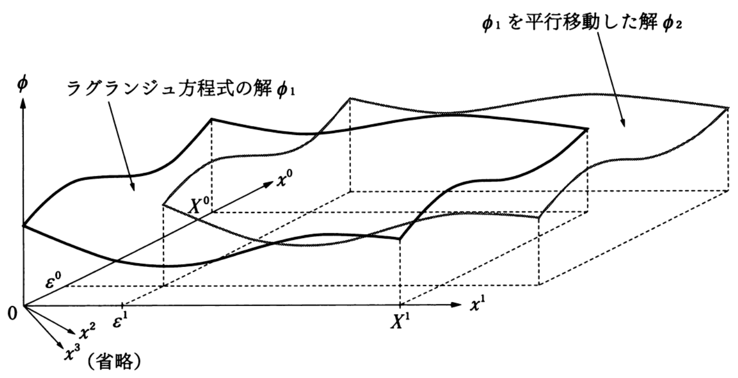


図 4-4　場の理論におけるネーターの定理

座標をずらす大きさは微小量だとして，その 1 次まで取ると，次の関係式が成り立つ．

$$\phi_2(x^\mu) = \phi_1(x^\mu - \varepsilon^\mu) = \phi_1(x^\mu) - \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_1(x^\mu) \tag{4.14}$$

2 つの解 ϕ_1 と ϕ_2 に対する作用 $S[\phi_1]$ と $S[\phi_2]$ も等しくなる（次式では，ラグランジアン密度の引数となる ϕ の時間微分と空間微分を，まとめて $\partial\phi$ と記している）.

$$\begin{aligned}
&S[\phi_1] = S[\phi_2] \\
&S[\phi_1] = \int_0^X d^4x \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1) \\
&S[\phi_2] = \int_\varepsilon^{X+\varepsilon} d^4x \mathcal{L}(\phi_2, \partial\phi_2) \\
&\qquad \left(\int_A^B d^4x \cdots \equiv \int_{A^0}^{B^0} dx^0 \int_{A^1}^{B^1} dx^1 \int_{A^2}^{B^2} dx^2 \int_{A^3}^{B^3} dx^3 \cdots \right)
\end{aligned}$$

多重積分の場合，積分の範囲に関する関係式 (4.8) は，次のように拡張される.

$$\int_X^{X+\varepsilon} d^4x \mathcal{L}(\phi_2, \partial\phi_2) - \int_0^\varepsilon d^4x \mathcal{L}(\phi_2, \partial\phi_2) = \int_0^X d^4x \varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1)$$

ただし，μ については，和の規約に従って 0 から 3 まで足しあげ，ε^μ の 2 次以上の項は落とした.

これらを使えば，(4.7) 式から (4.9) 式を導いたのと全く同じようにして，2 つの作用の差を計算することができる．計算はそれほど難しくないので，ここでは，(4.9) 式に対応する結果だけを書いておこう（δ^μ_ν は，上下の添字が等しいときは 1，異なっているときは 0 になる記号である）.

$$\begin{aligned}
S[\phi_2] - S[\phi_1] &= \int_0^X d^4x \left\{ \partial_\mu \left(-\varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_1 \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1)}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \right) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1) \right\} \\
&= -\varepsilon^\nu \int_0^X d^4x \partial_\mu \left(\partial_\nu \phi_1 \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1)}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}(\phi_1, \partial\phi_1) \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

どのようにずらしても 2 つの作用は等しくなるはずなので，(4.15) 式右辺の被積分関数はゼロでなければならない.

ここで，次式のテンソルを定義する（負号を付けたのは，T_{00} がエネルギー密度となるようにした本書の符号の定義による）.

$$-T^\mu_\nu = \partial_\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{4.16}$$

(4.15) 式右辺の被積分関数がゼロになることより，次の式が成立する.

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{4.17}$$

この式は，時間と空間をずらしても運動法則が変化しないという対称性から導かれた保存則を表しており，エネルギー保存則を場の理論に拡張したものになっている．(4.16) 式で定義されるテンソルは，**エネルギー運動量テンソル**と呼ばれる．

特に，ラグランジアン密度が (4.10) 式で与えられる場合，エネルギー運動量テンソルは，次のようになる．

$$-T^{\mu}_{\nu} = -\partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}\left(-\frac{1}{2}\partial^{\rho}\phi\partial_{\rho}\phi - U(\phi)\right) \tag{4.18}$$

この式のテンソルは，3-4 節で使われたスカラー場のエネルギー運動量テンソルと同じ形になっている．

ここまでの議論は，ミンコフスキ計量が使える平坦で定常的な時空を考えているため，(4.18) 式のままでは，膨張宇宙のエネルギー運動量テンソルにならないはずである．しかし，混合テンソルで表した場合は，ミンコフスキ計量とロバートソン・ウォーカー計量の違いは式の上では現れず，結果的に (4.18) 式がそのまま膨張宇宙のエネルギー運動量テンソルになっている．なお，上に記した (4.18) 式は，第 3 章 (3.15) 式と同一である．

場の理論の場合，エネルギーの保存則は，「エネルギー E の値が一定」という形式ではなく，(4.17) 式のような微分を用いた式で表される．このことは，宇宙論で重要になる．宇宙が加速膨張するとき，暗黒エネルギーのエネルギー密度はほとんど変わらない（第 3 章 3-6 節で述べたスローローリングの場合はゆっくりと変化するが，宇宙定数の場合は文字通り定数のままである）．エネルギーの総量が一定だとすると，急激に膨張しているにもかかわらずエネルギー密度が一定になることは，エネルギー保存則に反するかのように思える．しかし，エネルギー保存則が，「全エネルギー $E=$ 一定」ではなく，(4.17) 式のような微分の式で表されるのならば，保存則は破れていない．

宇宙論以外のケースでは，(4.17) 式の保存則を積分した形で用いることができる．充分に大きな空間領域 Ω の内部でのエネルギーを，次のように定義してみよう．

$$E = -\int_{\Omega} dxdydz T^{0}_{0}$$

このとき，エネルギーの時間微分は，(4.17) 式を使って変形できる．

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = -\int_{\Omega} dxdydz\partial_0 T^{0}_{0} = +\int_{\Omega} dxdydz\sum_{j=1}^{3}\partial_j T^{j}_{0} = \sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} dS_j T^{j}_{0}$$

最後の等式は，ガウスの発散定理を使って，空間領域 Ω の表面（$\partial\Omega$）での積分に書き直した．もし物理現象が Ω 内部のある範囲でしか生起せず，その外側で右辺のエネルギー運動量テンソルの成分がゼロになるならば，領域 Ω 内部でのエネルギーの保存則が導かれる．電磁気学で静電場の分布を計算する場合などでは，この仮定が採用される．しかし，宇宙論では，この仮定は成立しない．宇宙原理が成り立っている場合は，宇宙空間の全ての場所が同じような状態なので，ある範囲の外側でエネルギー運動量テンソルの成分がゼロになるとは言えないからである．

4-4 節　一般相対論とエネルギー運動量テンソル

4-3 節の議論は平坦な時空を仮定していたが，時空のゆがみを考慮する一般相対論でも，最小作用の原理からラグランジュ方程式を導いたり，ネーターの定理を応用してエネルギー運動量保存則を導くことができる．こうした計算には，大学院レベルの数学が必要になるので，本書で具体的な計算法は記さないが，次の重要な点を指摘しておきたい．すなわち，一般相対論に関するラグランジュ方程式がすなわちアインシュタイン方程式であり，そこに現れるエネルギー運動量テンソルは，ネーターの定理から導かれるエネルギー運動量テンソルと同一だということである．

アインシュタイン方程式は第 1 章 (1.28) 式として掲げておいたが，改めて下に書いておこう．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

この右辺は，(4.16) 式で定義されるエネルギー運動量テンソルを一般相対論に拡張したものに等しい．実は，アインシュタイン方程式に，（微分されたものではなく）エネルギー運動量テンソル自体が現れることが，暗黒エネルギーの存在と密接に結びつくのである．

エネルギー運動量テンソルは，もともと保存則を定義するために導入された量であり，(4.17) 式のように，微分した値がゼロになるという形で用いられる．したがって，エネルギー密度のような量は，本来，定数の不定性を持つはずである．例えば，ニュートンの重力理論の場合，質量 m の粒子から距離 r の地点での重力ポテンシャルは，$-Gm/r+$ 定数 という形になる．通常は，無限遠で重力ポテンシャルがゼロになるように定数をゼロと置いているが，これは単なる便宜的な措置であり，理論から定数の値を決定することはできない．

こうした不定性は，最小作用の原理に含意されている．4-3 節のスカラー場の理論を

例に取ろう．このとき，作用 S は次の式で表される（添字 M は，物質に関する量であることを表す）．

$$S_M = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}_M = \int_\Omega d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi)\right) \tag{4.19}$$

ただし，Ω は積分する範囲であり，4-3 節の議論では，各座標を一定の範囲に限った矩形領域として与えられていた．最小作用の原理は，Ω の表面で場の量を固定するという境界条件の下で Ω 内部の ϕ を変化させたとき，S の変化がゼロになるような経路が（古典論の範囲では）実現されるというものである．積分する範囲が決まっているので，ポテンシャル U に定数を加えても，S の変化には寄与しない．これが，ポテンシャルの不定性である．

一般相対論になると，事情は全く異なる．一般相対論では，任意の座標変換に対して理論が不変であることが要求される．(4.19) 式の作用の場合，スカラー場の微分に掛かっているミンコフスキ計量を一般の計量テンソル（重力場）に置き換えると，被積分関数となるラグランジアン密度は座標変換に対して不変なスカラーとなる．しかし，積分に現れる d^4x は，座標そのものを含んでいるため，座標を変換すると値が変化してしまう．積分を不変にするためには，d^4x に $\sqrt{-g}$ を乗じなければならない（その理由を知りたい人は，一般相対論の教科書で勉強していただきたい）．ただし，g は 重力場 $g_{\mu\nu}$ を行列と見なしたときの行列式の値である．

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu})$$

したがって，(4.19) 式の作用を一般相対論に拡張したものは，次のようになる．

$$S_M = \int_\Omega \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L}_M = \int_\Omega \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi)\right) \tag{4.20}$$

重力場と物質の場を含む作用は，次式で与えられる（添字の G は，重力に関する量であることを示す）．

$$S = S_G + S_M = \int_\Omega \sqrt{-g} d^4x (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) \tag{4.21}$$

重力場のラグランジュ方程式は，重力場を

$$g^{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

のように変えたとき，(4.21) 式の作用がどのように変化するかを求めることで得られる（後で式変形をする際の都合上，添字が上に付いたものを考える）．作用の変化が，(4.3)

式ないし (4.12) 式と同じように，

$$\delta S=\delta S_G+\delta S_M=\int_\Omega \sqrt{-g}d^4x\left(\cdots\right)\delta g^{\mu\nu}$$

と表されたとすると，$(\cdots)$ をゼロと置いたものがラグランジュ方程式になる．

詳しい説明はしないが，重力場の作用 S_G の変化からは，アインシュタイン方程式の左辺が出てくる．それでは，スカラー場の作用 S_M はどう変化するのだろうか？

スカラー場のラグランジアン密度に関しては，微分項に掛かった重力場だけが変化する．

$$\delta\mathcal{L}_M=\delta\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-U\left(\phi\right)\right)=\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\delta g^{\mu\nu}$$

これだけならば，ポテンシャルに定数を加えても差が生じないので，ニュートンの重力理論と同様にポテンシャルに不定性が存在することになる．しかし，実際には，積分に含まれる $\sqrt{-g}$ も，次のように変化する（導出法は，多くの一般相対論の教科書に書かれている）．

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

これらを使えば，重力場を変えたとき，スカラー場の作用がどのように変化するかがわかる．

$$\begin{aligned}\delta S_M&=\int_\Omega \sqrt{-g}d^4x\delta\mathcal{L}_M+\int_\Omega \delta\left(\sqrt{-g}\right)d^4x\mathcal{L}_M\\&=\int_\Omega \sqrt{-g}d^4x\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M\right)\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

係数と添字の上下を別にすれば，右辺の (　) 内の式は，(4.18) 式のエネルギー運動量テンソルと一致することがわかる．アインシュタイン方程式の右辺は，このようにして導き出される．

多くの物理学理論では，ポテンシャルに定数の不定性が存在する．重力のポテンシャルや電磁ポテンシャルを計算する際には，計算に都合がよいように便宜的に定数を定めることが許される．しかし，一般相対論は，そうではない．積分に $\sqrt{-g}$ が付くせいで，定数（あるいは，ラグランジアン密度の中でゆっくりと変化する項）が時空の変動に寄与する．しかも，その効果はかなり大きい．一般相対論以前の物理学者たちが気に掛けなかったエネルギーの定数項が，宇宙論では重要な役割を担うことになる．これが，暗黒エネルギーなのである．

一般相対論では，アインシュタイン方程式が成り立っているならば，自動的にエネルギー保存則は満たされる（粒子の運動の場合でも，運動方程式が成り立っていればエネルギー保存則は満たされるので，この性質は驚くべきことではない）．したがって，暗黒エネルギーが存在する場合でも，アインシュタイン方程式に基づいて議論を進める限り，エネルギー保存則が破れることはない．暗黒エネルギーは，空間が膨張してもエネルギー密度がほとんど変化しないという奇妙な性質を持つが，エネルギー保存則とは矛盾しないのである．

一般相対論では，時空のゆがみが存在するので，(4.17) 式に現れる微分を，共変微分と呼ばれるものに置き換えなければならない（共変微分の具体的な定義は，一般相対論の教科書を参照していただきたい）．共変微分を ∇_μ で表すことにすると，エネルギー保存則は次式で与えられる（添字の上下を (4.17) 式から変更している）．

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

一方，重力場から作られるテンソルは，次の関係式を恒等的に満たすことが知られている．

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0, \qquad \nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$$

したがって，アインシュタイン方程式が成り立つならば，エネルギー保存則が自動的に満たされることになる．

4-5 節　さまざまな暗黒エネルギー

1980 年以前には，宇宙項が存在すると加速膨張になることはわかっていたが，空間膨張の加速度が観測されなかった（誤差範囲内で加速度ゼロと解釈できた）こともあって，宇宙項は存在しないという見方が支配的だった．しかし，インフレーション宇宙論の登場によって，宇宙の初期に加速膨張の時期があったという見方が強まると，宇宙項やポテンシャルエネルギーのような暗黒エネルギーに対して新たな関心が生まれてきた．さらに，第 5 章で詳しく述べるように，1990 年代後半になると，現在の宇宙も加速膨張していることを示す観測データが得られ，暗黒エネルギーの必要性が認識されるようになった．

暗黒エネルギーが必要になったとしても，その正体は，今のところ全く不明である．

ここでは，これまでに登場した暗黒エネルギーを再び列挙しておこう．

(1) 宇宙項　宇宙項は，最初に考案された暗黒エネルギーであり，宇宙定数 λ の符号が正ならば，加速膨張を引き起こす．定数であるから，空間が膨張してもその値は変わらない．

宇宙定数の物理学的な位置づけははっきりしていない．ラグランジアン密度の中に定数項として現れるものだが，(4.21) 式に示したように，重力場のラグランジアン密度と物質に関する場のラグランジアン密度を加えたものが作用 S となるので，定数項をどちらのラグランジアン密度に含めるべきかもわからない．また，宇宙項が存在するとして，それが何か他の量（下に記す零点エネルギーやポテンシャルなど）から導かれるのか，物理法則の中に定数として存在するのかについても，何とも言えない．

(2) 零点エネルギー　第 2 章で述べたように，量子場には必然的に量子揺らぎが伴う．素粒子として観測される励起状態を作るには一定値以上の励起エネルギーが必要だが，そこに達しない微小な揺らぎは常に存在しており，素粒子のない真空中にも潜んでいる．これが量子場の零点エネルギーである．零点エネルギーは単なる理論上の虚構で現実には存在しないと考えられたこともあったが，現在では，実際に存在すると見なされている．例えば，ブラックホールはホーキング放射を起こして最終的に蒸発すると予想されているが，この放射は，重力の影響で零点エネルギーが変化することに起因する．

それでは，零点エネルギーが暗黒エネルギーとなって宇宙空間の膨張を支配しているのだろうか？　実は，この問いを投げかけた段階で，暗黒エネルギーの理論的研究は暗礁に乗り上げてしまう．零点エネルギーの大きさを理論的に評価する方法が全くなく，かなり粗っぽい方法で推定すると，観測値とは桁違いの値になってしまうからである．

量子場は無数の振動子の集まりと見なすことができるが，零点エネルギーは，この振動子 1 つ 1 つに対して $\hbar\omega/2$ という寄与を与える．したがって，振動子が稠密（ちゅうみつ）に存在しているとすると零点エネルギーは無限大になる．いまだ未完成の量子重力理論の予想に基づいて，空間的な距離にはプランク長（1.6×10^{-35} m；定義は第 7 章 (7.12) 式）という下限があるとすると，1 立方プランク長当たり 1 個の振動子が存在することになるが，こうして求められる零点エネルギーは，無限大ではないものの，観測値とは 120 桁ほどの開きがある（第 10 章 10-3 節参照）．

空間が膨張しても零点エネルギーは変化しないのか，必ずしも自明ではない．そもそも，量子場を振動子の集まりと見なすのが間違いなのかもしれない．零点エネルギーに関してはわからないことだらけである．

どうしても手に負えない問題があるときには，取りあえずこれを迂回（うかい）して，対処できる問題から扱っていくというのが，研究における基本的なやり方である．暗黒エネル

ギー研究でも，零点エネルギーについては後回しにしている段階である．

(3) スカラー場のポテンシャル　スカラー場のポテンシャル $U(\phi)$ は，ϕ の値が変化しない限り同じ値を保ち続ける．したがって，ϕ が空間の広い範囲にわたってほぼ一定で，時間とともにゆっくりと変化する場合には，$U(\phi)$ は宇宙項と同じような効果を時空に及ぼす．$U(\phi)$ の効果で空間が急激に膨張したとしても，ϕ の値が変わらなければ，エネルギー密度は減少しない．

空間の広い範囲で一定の値を取ることができるのは，スカラー場ならではの性質である．電場 $\boldsymbol{E}$ のようなベクトル場が空間全域に凝縮すると，空間に特別な向きがないという実験事実と矛盾してしまうが，スカラー場ならば，そうした問題は引き起こさない．標準的な素粒子論（標準模型およびその拡張である大統一模型）において，真空（場が励起状態にない空間）では，スカラー場の一種であるヒッグス場だけが凝縮を起こしてゼロと異なる値を持つと仮定されているが，これ以外にもスカラー場が凝縮を起こしている可能性がある．

ポテンシャル $U(\phi)$ の関数形を理論的に規定することは今の段階ではできていないため，さまざまな関数形を仮定したときにどのような現象が生じるかを調べる研究が進められている．こうした研究は，多くの物理学者にとってお手の物である．観測データを説明するような関数形がいくつも提案され，それぞれのケースについて数多くの論文が執筆されている．こうした状況だけ見ると，いかにも研究が活発なようにも思えるが，ポテンシャルの形を決定する理論がないまま，対処できる問題に取り組んでいるとも言えそうである．

第 5 章では，加速膨張に関する観測データと，これと合致するように作られたスカラー場のモデルを見ていくことにする．

第 5 章

インフレーションを検証する

5-1 節　インフレーション理論の現状

インフレーション理論は，初期宇宙の経過を記述する理論として最も有力な仮説ではあるが，まだ定説といえるほどではない．平坦性問題・地平線問題に対する解答にはなっているものの，インフレーション理論以外にうまくいく解決法がないとは言い切れない．また，理論にさまざまなヴァリエーションがある上に，調節できるパラメータも多く，あるデータが得られれば理論の信憑（しんぴょう）性が一気に高まり，得られなければ棄却されるということもない．予想と異なるデータが得られた場合は，それにあわせるように理論を手直しする余地があるため，棄却もされないが確証も得られないという宙ぶらりんの状態が続いている．

一般に，科学理論が検証され定説として受け容れられる過程には，3 つのルートがある．

①信頼されている別の理論との結びつきを明らかにする．

古いインフレーション理論は，当時人気のあった大統一理論（素粒子の標準模型をさらに拡張した理論）に必ず含まれるヒッグス場を使ってインフレーションを引き起こすというアイデアだったため，多くの物理学者の注目を集めた．しかし，結局，このアイデアはうまくいかず，ヒッグス場以外のスカラー場としてインフラトン場を用意しなければならなくなって，いわゆるアドホックな（その場しのぎの）仮説としての性格を色濃くしてしまう．大統一理論以外では，超対称性理論がスカラー場を含む理論として知られているが，学界で広く支持されているとは言い難い．

②可能な対抗仮説を網羅した上で，これら全てに反駁（はんばく）する．

科学とは，対抗仮説間の比較検討を経て発展する学問体系である．例として，恐竜絶滅の原因として今や定説となった「衝突説」を取り上げよう．この説は，6500 万年前

に直径 10 km ほどの小惑星が衝突し環境が激変したことを主張するもので，きっかけになったのは，恐竜が絶滅した白亜紀末の地層に，イリジウムが濃縮しているという発見だった．衝突説の提案者は，イリジウムの起源として，地球表面での濃縮と太陽系外からの飛来という 2 つの説を検討し，同位体比などのデータをもとに反駁，太陽系内の小惑星に豊富に含有されるイリジウムが起源だと論じた．これに対して，衝突説提案者が検討しなかった地球内部が起源ではないかという見方が浮上，イリジウム含有量の多いマントルが大規模な火山噴火で放出されたという「噴火説」が対抗仮説として提唱され，両仮説の支持者の間で論争が繰り広げられることになる．最終的には，地層に含まれる物質との整合性の高い衝突説が優位に立ち，定説として受容された．このようなプロセスが，科学において定説が生まれる基本的な流れである．

ところが，インフレーション理論に関しては，有力な対抗仮説が少なく，さまざまな仮説の中で優位性を主張することができない．平坦性問題や地平線問題に関して言えば，宇宙は初めから平坦で均一だったと仮定しても，不自然に感じられるが矛盾はなく，反駁できない．

③理論からさまざまな予想を導き出して，これを観測データと比較する．

理論的な予想と観測データが高い精度で一致すれば，インフレーション理論の信憑性が高まることになるはずである．しかし，今のところ，理論を検証したと言えるほどのデータはない．

今後の検証においては，インフレーション期に生み出された重力波の痕跡が鍵となる．2009 年に打ち上げられた宇宙探査機 Planck や，チリに設置された電波望遠鏡 NANTEN2 などで集められた宇宙背景放射に関する高精度のデータを分析して，標準的なインフレーション理論から導かれる重力波の痕跡が見いだされれば，決定的とも言える証拠となる．もっとも，インフレーション理論のいくつかのヴァリエーションは，重力波がきわめて弱くなる可能性を示しており，たとえ痕跡が発見できなくても，インフレーション理論はしぶとく生き残るはずである．

現時点で観測データと一致するほとんど唯一の予想は，物質分布の揺らぎに見られる**スケール不変性**である．この性質は，宇宙の初期における密度揺らぎの指数（後で出てくる (5.3) 式のべき指数 n）が 1 であればうまく再現できるが，インフレーション理論は，この指数 1 を導くことができる．この点を強調して，インフレーション理論が検証されたという主張もあるが，（電子の異常磁気モーメントのような）物理量の具体的な値ではなく，スケール不変性というかなり一般的な性質に関する予想だけに，証拠としてはいささか弱い．とは言っても，インフレーション理論を支持する数少ないデータなので，以下では，この点について説明する．

5-2節　質量分布の揺らぎとスケール不変性

現在の宇宙における質量分布は，十数億光年以上の範囲にわたって均(なら)してしまえばほぼ一様だが，銀河団のスケールまで解像度を上げて見ると，銀河の密集度が場所によってかなり異なっていることがわかる．こうした質量分布の偏りは，宇宙が高温だったビッグバン直後におけるスープ状の物質（暗黒物質を含む）に密度の揺らぎがあったことに起因する．空間が膨張して高温で濃密な物質のスープが低温のガス雲になったとき，密度が相対的に高い領域には重力の作用で物質が自然と集まってくるため，揺らぎが成長して天体や銀河が形成された．最初の密度揺らぎがなければ，天体の形成はなかなか起こらない．

それでは，ビッグバン直後の密度の揺らぎはどのようにして生み出されたのだろうか？　この問題に答えるためには，まず，ビッグバン直後の密度揺らぎが具体的にどのようなものかを明らかにし，しかる後に，そうした揺らぎを実現するメカニズムを考察する必要がある．この5-2節では，このうち前半の課題に答えたい．後半の課題に関しては，次の5-3節で取り上げる．

現在の質量分布が完全にわかったとしても，そこからあらゆるスケールでの初期揺らぎを求めるのは，かなり難しい．重力で物質が凝集するプロセスを詳細に分析しなければならず，スーパーコンピュータでも手に負えないためである．そこで，重力による相互作用が及ばないスケールに限定して，初期の密度揺らぎを調べることにする．このスケールを決定するのが，第3章(3.1)式で定義されたハッブル距離 l_H である．ハッブル距離は，ある地点から後退速度が光速になる場所（**ハッブル面**）までの距離に等しく，この値を超える地点に作用を伝達することはできない（厳密に言えば，膨張速度が変化する宇宙空間では，後退速度が光速になる地点（ハッブル限界／ハッブル面）と相互作用の及ぶ限界（事象の地平線）は異なり，観測可能な範囲の限界（情報の地平線）とも違うが，ハッブル限界と事象の地平線の位置は近く，インフレーション期にはほぼ一致するので，この2つをあえて区別せずにハッブル面と呼ぶことにする）．物質同士の相互作用によって変化する揺らぎのスケールは，ハッブル距離以下に限られる．したがって，ハッブル距離以上のスケールの揺らぎに議論を絞れば，ビッグバン以降の相互作用によって初期揺らぎが乱される効果を取り除くことができる．

ここで，ハッブル距離によるスケールの区分をイメージしやすいように，空間とともに膨張する球を考えることにしよう．空間とともに膨張するので，球の半径は，（物差しなどを使って長さの単位を決める）実スケールではスケール因子 a に比例し，共動座標で表すと一定の値となる．

一方，ハッブル距離は，インフレーション期間中と終了後では，振舞いが大きく変わる．インフレーション理論によれば，インフラトン場の効果で宇宙空間が指数関数的に膨張している間，ハッブルパラメータ H（第 3 章 (3.16) 式で定義されたもの）や，その逆数であるハッブル距離はきわめてゆっくりとしか変化しないため，インフレーション期間中にこれらの値は一定だと仮定してかまわない．ハッブル面の内側にあった揺らぎは，空間が急激に膨張するにつれて引き伸ばされ，ハッブル面の外側に送り出されていく．仮に，ある時刻に波長 λ の正弦波の形をした揺らぎがハッブル面の内側にあったとすると，インフレーションによって波長は指数関数的に引き伸ばされ，充分に時間が経てばハッブル面を越えた波となる．

インフレーションが終了すると，フリードマン方程式に従ってハッブル距離は増大し始めるので，ハッブル面は外側へと拡がっていく．このとき，（第 3 章 §3-1-1 で示したように）ハッブル距離はスケール因子よりも速やかに増大していくので，インフレーション期にハッブル面の外に出た波が，再びハッブル面内部に戻ってくることになる．空間とともに膨張する球について言えば，中心から見たハッブル面は，当初は球の内側にあったが，ある時刻に球面と交差し，さらに外側に拡がっていく（図 5-1）．そこで，球の半径がハッブル距離と等しくなり，球面とハッブル面が交差する時刻を t_H と置く．すると，この時刻 t_H に球の半径より大きな波長を持つ揺らぎは，（ハッブル距離以上のスケールなので）物理的な相互作用によって乱されておらず，初期揺らぎをそのまま反映したものとなっている．t_H は考えている球の大きさと関係しており，球が大きくなるほど t_H も大きくなる．

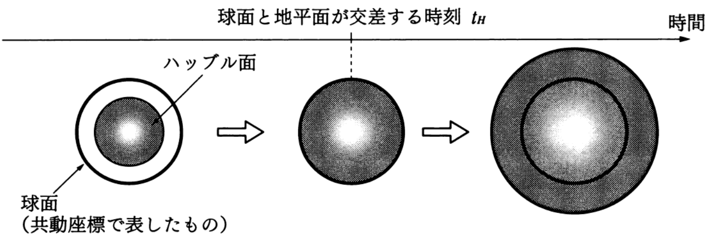


図 5-1　球面と地平面の交差

時刻 t_H での質量密度 ρ の式を立てよう．場所 $\boldsymbol{x}$ の質量密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ を，宇宙全体で平

均した平均密度 ρ_0 と揺らぎ $\delta\rho$ に分け，後者をフーリエ展開する（ここでは，形式的にフーリエ変換の式を書いておく）.

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) = \rho_0(t) + \delta\rho(t, \boldsymbol{x}) = \rho_0 + \int \frac{d^3k}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \delta\rho_{\boldsymbol{k}}(t)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.1}$$

この式に現れる空間座標 $\boldsymbol{x}$ は，インフレーション期における場の状態と結びつける際の便宜を考えて共動座標を用いることにするので，それにあわせて波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ も "共動" になる．実スケールで表すと，空間が膨張するにつれて波の波長も引き伸ばされるため，1メートル当たりの波の個数として定義される波数は減少する．しかし，共動座標を使って波を表した場合，波数は，共動座標1目盛り当たりの波の個数になるので，ある特定の波の波数は，空間が膨張しても変化しない．実スケールでの値と比較する場合，共動距離は実スケールの $1/a$ 倍，共動波数は実スケールの a 倍になっていることに注意する.

(5.1) 式の $\delta\rho_{\boldsymbol{k}}$ は，共動座標の目盛りで $1/|\boldsymbol{k}|$ 程度の空間的なスケールでの密度の変動を表している．球面とハッブル面が交差する時刻 t_H での半径（= ハッブル距離）は実スケールで $1/H$（H はハッブルパラメータ），共動座標の目盛りで $1/aH$ となる．$|\boldsymbol{k}| > aH$ となる波数の密度揺らぎは，物質間の重力による凝集の効果が含まれるため，インフレーション期に形成された初期揺らぎと結びつけるのは難しい．しかし，$|\boldsymbol{k}| < aH$ となる波数では，ハッブル距離を超えるスケールでの密度揺らぎになるので，初期揺らぎがそのまま空間膨張によって引き伸ばされたものになっている.

(5.1) 式を使って，半径がハッブル距離に等しいときの球内部の質量を求めよう．密度が平均密度 ρ_0 と等しいときの質量を M，実際の質量の M からのずれを δM とする．積分するときには共動座標を a 倍しなければならないことに注意すれば，平均的な質量として

$$M = \int_{|\boldsymbol{x}|<1/aH} a^3 d^3x \rho_0 = \frac{4\pi\rho_0}{3H^3}$$

を得る．これは，実スケールの半径が $1/H$ で密度が ρ_0 の球の質量の式に等しい（密度 ρ_0 は時間とともに $1/a^3$ になることを忘れないように）.

一方，質量の揺らぎは，次式で与えられる.

$$\delta M = \int_{|\boldsymbol{x}|<1/aH} a^3 d^3x \delta\rho = \int \frac{d^3k}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \delta\rho_{\boldsymbol{k}} \int_{|\boldsymbol{x}|<1/aH} a^3 d^3x e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

右辺の空間積分において，$|\boldsymbol{k}|$ が aH より充分に大きければ，積分範囲内で $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ が振動して打ち消しあってしまい，積分値はほぼゼロになる．逆に，$|\boldsymbol{k}|$ が aH より充

分に小さいと，$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ はほとんど 1 に等しい．ここでの議論では，$|\boldsymbol{k}|$ が aH に近い領域はあまり重要ではないので，$|\boldsymbol{k}| > aH$ ならば $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = 0$，$|\boldsymbol{k}| < aH$ ならば $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = 1$ と置いてしまおう（これはかなり粗っぽい近似に見えるが，より正確な計算によって正当化できる）．すると，質量の揺らぎは次式で与えられる．

$$\delta M = \frac{4\pi}{3H^3}\int_{|\boldsymbol{k}|<aH}\frac{d^3k}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\delta\rho_{\boldsymbol{k}}$$

この式に現れる $\delta\rho_{\boldsymbol{k}}$ は，物質同士の相互作用が無視できる波数に対応する成分なので，インフレーション期の情報をそのまま含んでいる．

ここまでの議論は，空間のある地点を中心とする球に限った話であり，$\delta\rho_{\boldsymbol{k}}$ の値は，その場所に固有のものとなる．そこで，宇宙空間のさまざまな地点で同じ共動半径の球を考えることにしよう．さまざまな場所での $\delta\rho_{\boldsymbol{k}}$ の値は統計的なばらつきを示すので，これらの平均値を取って，その結果を $\langle\ \ \rangle$ で表すことにする．宇宙空間には特定の向きがないので，平均値を取ると，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の向きに対する依存性はなくなるはずである．また，フーリエ成分の積を考える場合，波数が異なる成分の積の平均は（正負が互いに無関係に現れるため）ゼロになる．したがって，次のように書くことができる．

$$\langle\delta\rho_{\boldsymbol{k}}\delta\rho_{\boldsymbol{k}'}\rangle = \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\rho_0^2 P(k) \qquad (k \equiv |\boldsymbol{k}|) \tag{5.2}$$

この式に現れる $P(k)$ は，統計学でパワースペクトルと呼ばれるものである．$\delta(\cdots)$ はディラックのデルタ関数で，引数がゼロでないとき関数値はゼロであり，ゼロを含む領域で積分すると積分値 1 を与える．

この式を使うと，δM を M で割った相対質量揺らぎの 2 乗平均は，次式で与えられる（半径がハッブル距離に等しくなったときの量であることを示すために，添字 H を付けた）．

$$\left\langle\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2\right\rangle_H = \int_0^{aH}\frac{2\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}P(k)$$

パワースペクトルも時間とともに変化するが，ハッブル距離のスケールを超える（$k < aH$ の）波数のパワースペクトルは，物質の相互作用の影響を受けず，空間が膨張する効果によって引き伸ばされるだけである．このときのパワースペクトルの変化は，理論的に求めることができる．

専門的な研究では，物質がさまざまな状態にあるケースを網羅的に調べる必要があるが，ここでは，議論を簡単にするために，インフレーション終了後，宇宙にはダスト状の物質しかなく，圧力が作用しないものと仮定しよう．詳しい説明は省略するが，この

ような場合，パワースペクトルにおける空間膨張の効果は，スケール因子 a の2乗が掛かる形で現れる．

さらに，もっともらしい仮定として，インフレーション終了時点でのパワースペクトルが k の n 乗の形になるとすると，$P(k)$ は次式で与えられる（c_1 は未知の係数）．

$$P(k) = c_1 a^2 k^n \tag{5.3}$$

これを使うと，半径がハッブル距離に等しいときの球内部の質量の揺らぎとして，次式が得られる．

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle_H = \frac{c_1 a^2}{(2\pi)^2} \int_0^{aH} k^{(2+n)} dk = \frac{c_1}{(2\pi)^2 (3+n)} a^2 (aH)^{3+n}$$

（第3章 §3-1-2 地平線問題で示したように）圧力項のないフリードマン方程式を解くと，インフレーションが終了してからあまり時間が経過していない時期には，スケール因子 a は時間 t（フリードマン方程式の解で a が0となる瞬間を時間の原点とする）の2/3乗に比例することがわかる．時刻 t_H では

$$a = c_2 t_H^{2/3}, \qquad aH = \dot{a} = \frac{2c_2}{3c} t_H^{-1/3} = \frac{2c_2\sqrt{c_2}}{3c} a^{-1/2}$$

となる（c_2 はこの宇宙に固有の係数）．これを使えば，相対質量揺らぎをスケール因子 a を使って表すことができる．係数を除いて書けば，

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle_H \propto a^{(1-n)/2} \tag{5.4}$$

となる．ただし，右辺の a は時刻 t_H でのスケール因子であり，初めに考えた球の共動半径や，半径がハッブル距離と等しくなったときの球内部の質量によって表される量である．

(5.4) 式は，圧力がないときのフリードマン方程式を使って導かれたもので，光の圧力が強い場合には成り立たない．一般の場合は，スケール因子ではなく，時刻 t_H での質量を用いた次の式が成り立つ．

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle_H \propto M_H^{(1-n)/3}$$

観測データを使うと，実際の宇宙における n の値が判明する．第3章でも紹介したWMAPのデータを解析したところ，n はほぼ1となった（最適値は 0.958 ± 0.016 だが，

データ解析を行う際にさまざまな仮説を組み合わせるので，1 より小さいか確定はできない)．n が 1 だとすると，(5.4) 式の右辺は，球の大きさに依存しなくなり，質量の相対的な揺らぎはスケールによらないことになる．このように，揺らぎがスケールによらないことを「スケール不変性」と言う．(5.3) 式で $n = 1$ と置いたパワースペクトルは，**ハリソン・ゼルドヴィッチ・スペクトル**と呼ばれており，初期の密度揺らぎがこの形で与えられることが，スケール不変性の起源となる．

インフレーション理論は，ハリソン－ゼルドヴィッチ・スペクトルを再現できるほとんど唯一の理論である．それだけに，$n = 1$ という WMAP のデータは，インフレーション理論を支持する重要な根拠とされている．

5-3 節　インフレーションがもたらす密度揺らぎ

それでは，インフレーション理論はどのようにしてハリソン－ゼルドヴィッチ・スペクトルを再現するのだろうか？　次に，この点を取り上げよう．もっとも，本格的な議論には専門知識が必要になるため，ここでは，専門家がどのような研究をしているか“感じ”を得ることを目的として，ごく簡単な紹介を行うにとどめる．

§5-3-1　量子揺らぎが生み出す密度揺らぎ

量子化された場は，基礎方程式（場に関するラグランジュ方程式）に厳密に従うのではない．基礎方程式を満たすのは作用が最小になる経路だけであり，量子論では，方程式の解となる最小作用の経路の周りに量子揺らぎが存在する．インフレーション理論によれば，インフレーションの段階で重力場やインフラトン場に生じていた量子揺らぎが，宇宙の初期に存在する密度揺らぎを生み出したとされる．

量子場には，常に量子揺らぎが存在する．インフレーションの期間中には，この揺らぎの波長が引き伸ばされ，互いに相互作用できないハッブル距離の彼方に去っていく．この結果，広い範囲にわたって場の値に差が生じることになるが，これが，インフレーションの終了時期に場所による違いをもたらす．インフレーションはインフラトン場の値が最小値に近づいて終了するが，場の値に差があると，最小値に近づく時刻が全ての場所で同じにならない．この違いのせいで，インフレーションの終了とそれに伴う高温状態への移行の時刻に場所によるずれがもたらされ，その結果として，エネルギー密度に差が生じる．素粒子はエネルギーを得た場の励起状態として生み出されるので，エネルギー密度に差があると，質量密度も異なってくる．

量子揺らぎがインフレーションによってどのように引き伸ばされ，宇宙空間のエネル

ギー分布に差を生み出すのかを定量的に議論するためには，アインシュタイン方程式をきちんと解かなければならない．しかし，そのためには大学院レベルの数学が必要となり，議論があまりに高度になるので，ここでは，量子揺らぎが成長するところまでを半定量的に扱い，その後は定性的な議論に切り替えることにする．

§5-3-2 インフラトン場における揺らぎの成長

第 3 章の議論では，インフラトン場が場所によらず，空間全域で同じ値になると仮定していた．しかし，揺らぎを考える場合には，場所による違いを考慮する必要がある．そこで，インフラトン場 ϕ を，場所に依存しない $\phi_0(t)$ と，場所依存性を持つ微小量の和に分けてみる．きちんと計算する場合には，後者をフーリエ展開することが必要だが，ここでは，インフレーションによって揺らぎがどのように拡がっていくかを大まかにつかむことが目的なので，次のように，特定の波数 k（$k>0$）を持つ x 軸方向の正弦波だけを考えることにする．

$$\phi(t,x)=\phi_0(t)+\sqrt{\frac{2}{V}}\phi_k(t)\cos kx \tag{5.5}$$

第 2 項の係数は，体積 V の 3 次元空間内でサインやコサインの 2 乗を積分したときに 1 になるように付けた．また，前節と同じように，x は膨張する空間に固定された共動座標であり，スケール因子を a とすると，物差しで測った実スケールの $1/a$ 倍になっている．

場所に依存する成分の大まかな振舞いを調べるため，次のような大胆な近似を採用しよう．すなわち，ϕ_0 は，第 3 章 (3.17) 式の ϕ と同じ方程式を満たして空間の加速膨張を引き起こし，ϕ_k は加速膨張する時空をバックグラウンドとして振舞うものとする．また，ポテンシャル U は ϕ_0 の方程式にだけ現れ，ϕ_k はポテンシャルからの作用を受けない自由場になると仮定する．第 3 章の議論に従えば，空間は近似的に指数関数に近い膨張を行うが，ここでは，正確に指数関数になるとして，次の計量を仮定する．

$$ds^2=-c^2dt^2+e^{2cHt}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \tag{5.6}$$

この計量テンソルで表される時空は，**ド・ジッター時空**と呼ばれる．スケール因子 a は

$$a=e^{cHt}$$

となる．H は，第 3 章 (3.16) 式で定義されるハッブルパラメータと等しい．ハッブルパラメータは，インフレーションの際にゆっくりと変化するはずだが，ここではおおよ

その振舞いを見ることが目的なので，定数と仮定している．

> インフラトン場が場所に応じて変動する場合は，それに応じて重力場も変動するので，バックグラウンドとしてド・ジッター時空を採用する議論は，第 0 近似とでも言うべき粗っぽいものにすぎない．宇宙論の専門家が実際に計算を行う場合は，インフラトン場だけではなく重力場も変動するものと仮定し，次のような計量を用いる（このほかにもいくつかの流儀がある）．
>
> $$ds^2 = -(1+2A)\,c^2dt^2 - aB_jcdtdx^j + a^2\left(\delta_{ij} + 2H\delta_{ij} + 2E_{ij}\right)dx^idx^j \qquad (5.7)$$
>
> この式に現れる A や B_j など，ロバートソン - ウォーカー計量からのずれを微小量と見なし，1 次の微小量まで取る線形近似で重力場とインフラトン場の方程式を連立させ，計算を行う．

ド・ジッター時空での ϕ_k に関する方程式は，相互作用のないクライン－ゴルドン方程式と呼ばれるものになるが，この方程式を扱うには曲がった時空における高階微分の知識が必要になるため，ここでは，ラグランジアンを書き換えて方程式を求めることにする．

インフラトン場の作用は，第 4 章 (4.20) 式に与えてある．ポテンシャルの項は ϕ_0 に関する方程式にのみ現れると仮定したので，ϕ_k のラグランジアンにポテンシャルは含まれない．また，

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = \sqrt{e^{6cHt}} = a^3$$

なので，空間座標による積分は，

$$\int a^3d^3x\cdots$$

という形になる（x, y, z は空間に固定された共動座標なので，空間が膨張する効果が a^3 という係数として現れるわけである）．インフラトン場の空間微分は，

$$\sum_{i,j=1}^{3} g^{ij}\partial_i\phi(t,x)\,\partial_j\phi(t,x) = e^{-2cHt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \qquad \left(g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = e^{-2cHt}\delta_{ij}\right)$$

となる．

これらの結果を使うと，ϕ_k に関する作用は次のように書き換えられる．

$$S_M = \int cdt \int a^3d^3x\frac{1}{V}\left(\left(\dot{\phi_k}\right)^2\cos^2 kx - (\phi_k)^2\,e^{-2cHt}k^2\sin^2 kx\right)$$

$$= \int cdt \frac{a^3}{2} \left(\left(\dot{\phi_k} \right)^2 - \frac{k^2}{a^2} \left(\phi_k \right)^2 \right) \qquad \left(a = e^{cHt} \right) \tag{5.8}$$

空間の積分範囲は充分広くとってあり，ゼロの周りで振動する三角関数は全て落とした．

作用が (5.8) 式で表されることより，$\phi_k = q$ と置けば，

$$L(q, \dot{q}) = \frac{a^3}{2} \left((\dot{q})^2 - \frac{k^2}{a^2} q^2 \right) \tag{5.9}$$

というラグランジアンで表される運動と同じ形になる．第 4 章 (4.4) 式に記したラグランジュ方程式を使えば，q は次の運動方程式を満たすことがわかる（(4.4) 式のドットは時間 t に関する微分で，本章のドットとは係数 c の違いがあることに注意）．

$$\ddot{q} + 3H\dot{q} + \frac{k^2}{a^2} q = 0 \tag{5.10}$$

(5.10) 式で $H = 0$（したがって $a = 1$）と置くと，q は振動数 kc で単振動することになる．これは，空間膨張のないミンコフスキ時空において，ポテンシャル項のないインフラトン場が光速で進む正弦波になることを表している．H が小さく a の変化がゆっくりしている場合は，弾性定数が少しずつ変化するバネの運動と同等になる．

一方，$H \to \infty$（したがって $a \to \infty$）のときには，q は定数に漸近する．これは，スケール因子があまりに急激に増加すると，空間の膨張に波動の進行が追いつけなくなるためで，波を振動させるという物理現象が伝わらなくなって，あたかも波が凍り付いたような状態になる．物理現象の伝播は光速を超えないが，インフレーションによる空間の膨張は光速を超えるという状況を反映している．

微分方程式 (5.10) の解がどうなるかを示そう．まず，変数を時間 t から次式で定義される η に変更する．

$$\eta = -\frac{ke^{-cHt}}{H} \left(= -\frac{k}{aH} \right)$$

t が $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する間に，η は $-\infty$ から 0 まで変化する．新しい変数 η を使って書き直すと，(5.10) 式は次のようになる（ダッシュは η についての微分を表す）．

$$q'' - \frac{2}{\eta} q' + q = 0 \tag{5.11}$$

この方程式は，次の形の解を持つ（α_k は k に依存する係数）．

$$q = \alpha_k (1 \pm i\eta) e^{\mp i\eta} \tag{5.12}$$

(5.12) 式が解になっていることは，これを代入すると方程式が満たされることから簡単に確かめられる（微分方程式を教科書風に解きたければ，変数変換によって (5.11) 式をベッセルの微分方程式に帰着させ，位数 3/2 のハンケル関数を使って解を表せば良い）．符号の取り方によって 2 つの解があるので，一般解はその線形結合となる．ミンコフスキ時空となるはずの $H \to 0$ の極限で η は $-\infty$ となってしまうが，これは，時間の原点の不定性による．指数関数 $\exp(\mp i\eta)$ の引数で

$$\eta = -\frac{k}{H} + kct + O(H)$$

と書き，第 1 項がこの不定性によるものと解釈して無視すれば，第 2 項から光速で伝播する正弦波の時間依存性が出てくる．$H \to 0$ のとき，(5.12) 式の (　) 内では，第 2 項が支配的になっている．

時間 t を無限の過去に遡っていくときも，η は $-\infty$ となり，(5.12) 式の (　) 内で第 2 項が支配的になる．k は共動座標での波数なので，$\eta \to -\infty$ は，共動座標で表したハッブル距離 $1/aH$ に対して共動波長が充分に小さいケース（$1/k \ll 1/aH$）になる．

空間が膨張するにつれて，インフラトン場の揺らぎの波長が引き伸ばされていく．初期の段階で波長がハッブル距離より遥かに小さかったとしても，インフレーションを通じて H が一定に保たれているので，ある時点で波長がハッブル距離を超えていく．こうして，もともとはごく狭い範囲に見られたインフラトン場の揺らぎが，広範囲にわたる揺らぎへと変貌する．

波長がハッブル距離を大きく超える（$1/k \gg 1/aH$）と，η はマイナス側からゼロに近づき，波が時間変化をしない凍り付いた状態になるとともに，(5.12) 式の (　) 内で第 1 項が支配的になる．これが，インフレーションが終了した時点での初期揺らぎとなる．

§5-3-3　量子揺らぎの振舞い

ここまでの議論は揺らぎが何であるかを特定しなかったが，ここから，量子揺らぎを考えていくことにしよう．

量子揺らぎとは，作用が最小になる経路以外からの寄与である．調和振動子の場合，ニュートン力学ならば，エネルギーが最低の状態ではバネに取り付けられたおもりは静止しているが，量子論では，第 2 章 (2.13) 式に記したような揺らぎを示す．このため，質量 μ，角振動数 ω の調和振動子のおもりの位置 q の 2 乗平均値は，

$$\langle q^2 \rangle \sim \frac{\hbar}{\mu\omega}$$

程度になる．（$\langle\ \ \rangle$ は平均値を表し，1 と同程度の係数を略したので $\sim$ という記号を用いた）．これは，量子論の一般的な性質であり，インフラトン場を量子化したときも同様

の揺らぎがあるはずである．(5.9) 式のラグランジアンを，ポテンシャルが第 2 章 (2.12) 式で与えられる調和振動子のケースと比較すると，質量と角振動数を

$$\mu \to \frac{a^3}{c^2}, \qquad \omega \to \frac{ck}{a}$$

と置き換えたことに対応する．したがって，インフラトン場の揺らぎは，q を ϕ_k に戻して表すと，

$$\langle \phi_k^2 \rangle \sim \frac{\hbar c}{a^2 k} \tag{5.13}$$

程度になる．$a \to 0$（$\eta \to -\infty$） とすると揺らぎが無限大になってしまうが，量子論には適用限界があるはずなので，a はどこか有限の値から始まると考えれば良いだろう．

この量子揺らぎは，$|\eta|$ が 1 より充分に大きいインフレーションの初期から存在していたはずである．この時期には，(5.12) 式の (　) 内第 2 項が支配的になるので，その項だけを抜き出して絶対値を取り，(5.13) 式と比較すれば，

$$|\alpha_k| \frac{k}{aH} \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{a^2 k}}$$

を得る．時間依存性を持つ a はうまい具合に両辺で打ち消され，

$$|\alpha_k| \sim H\sqrt{\frac{\hbar c}{k^3}} \tag{5.14}$$

となるので，$|\alpha_k|$ は時間によらない定数となる．ただし，ハッブルパラメータ H が未知の量として残っているので，理論的に大きさを決定することはできない．

時間が経過すると，波長がハッブル距離を超えて空間の広い範囲にまで引き伸ばされ，その状態で振動しない“凍り付いた波”となる．このとき，η はゼロに近づくので，(5.12) 式 (　) 内第 1 項の寄与が大きくなる．第 1 項だけを考えると，凍り付いた波の振幅は $|\alpha_k|$ に等しく，k の 3/2 乗に反比例する．

(5.5) 式では波数 k の正弦波の形をした揺らぎだけを考えたが，実際には，インフラトン場 ϕ の揺らぎ（ϕ_0 からのずれ）をフーリエ変換することにより，さまざまな波数の揺らぎを重ね合わせた形で計算する．この場合，各波数ごとにここまでと同じ議論を繰り返すことにでき，波数 k となるフーリエ成分の振幅が (5.14) 式で与えられる．

インフラトン場の振幅に k の 3/2 乗に反比例する揺らぎがある場合，物質密度の揺らぎのパワースペクトルは k に比例することが知られている．これは，5-2 節で紹介したハリソン－ゼルドヴィッチ・スペクトルに相当する．こうして，インフラトン場の量子揺らぎから，観測と一致するスペクトルが再現されたわけである．

インフラトン場の振幅の揺らぎからハリソン - ゼルドヴィッチ · スペクトルを導くためには，アインシュタイン方程式を具体的に解かなければならず，かなり高度な計算が必要になるので，ここでは，概要だけを簡単に紹介したい．

インフラトン場に揺らぎがあると，ポテンシャルが最小値に落ち込むまでの時間に差が生じる．波数 k の成分だけを考えることにすると，この時間の差は，インフレーションで引き伸ばされたインフラトン場が持つ揺らぎの振幅 $|\alpha_k|$ に比例する．ここで，重力場の揺らぎまで考慮した (5.7) 式を考えると，時間の差は，係数 A として現れるので，

$$A \propto |\alpha_k| \propto k^{-3/2}$$

となる．一方，A に関するアインシュタイン方程式は，近似的に，重力ポテンシャルと質量密度の揺らぎ $\delta\rho_k$ を結びつけるポアッソン方程式になる（第 1 章 (1.17) 式の前後の議論を思い起こされたい）．したがって，

$$\triangle A \propto \delta\rho_k$$

左辺のラプラス演算子 $\triangle$ は，正弦波の形の揺らぎを空間座標で 2 階微分することになるので，ここから k^2 が現れる．以上をまとめると，

$$\delta\rho_k \propto k^{1/2}$$

となる．揺らぎのパワースペクトルは (5.2) 式で定義されており，これと (5.3) 式を比較すれば，$n = 1$ を得る．

5-2 節の終わりでも述べたように，スケール不変なハリソン－ゼルドヴィッチ・スペクトルを理論的に導くことのできるのは，今のところほぼインフレーション理論に限られているため，この理論に対する支持率はかなり高い．しかし，スケール不変性という性質はそれほど特殊ではなく，他の理論でも導ける可能性が充分に残されているため，インフレーション理論が検証されたとまでは言えない．

スケール不変性からのずれや，揺らぎの絶対値まで理論的な予測を導き，これが観測データと一致すれば，インフレーション理論がほぼ検証されたと言えるだろう．しかし，現在のインフレーション理論でこうした予測を行うことは難しい．その理由は，ポテンシャルの形などインフラトン場の相互作用の形式を理論的に決定できないことにある．例えば，インフレーション理論から揺らぎの絶対値を求めるには，(5.14) 式に示されるように，インフレーションが起きているときのハッブルパラメータの値が必要になるが，これはポテンシャルの形に依存するため未知量である．素粒子実験などのデータ

からポテンシャルを決定することができれば，宇宙論の予測が可能になるかもしれないが，これまでのところ，インフラトン場が生成する素粒子は見つかっていないし，近いうちに見つかる可能性も低い．

現時点で行われているのは，観測データをもとに，ポテンシャルの形などに制限を付ける作業だが，インフレーション理論には多くの種類があり，それぞれに関してポテンシャルの形を決めるパラメータに多くの自由度があるため，確定的な結論は出ていない．

5-4 節　各種のインフレーション

これまでインフレーション理論の種類をあまり具体的に示さなかったので，ここで簡単に触れておこう．

初期のインフレーション理論は，第 3 章 3-5 節で述べたように，素粒子論で必要とされるヒッグス場をインフラトン場と同一視していた．ヒッグス場 ϕ の期待値 $\langle\phi\rangle$ は，高温状態で $\langle\phi\rangle = 0$，低温状態で $\langle\phi\rangle = v$（v は素粒子のデータによって決定される値）でなければならないという条件があるため，ポテンシャルの形にいろいろな制限が付く．例えば，**コールマン・ワインバーグ型ポテンシャル**と呼ばれるものは，ϕ の多項式で表される単純なポテンシャルに量子場理論に基づく補正を考慮したもので，次の形で表される．

$$U(\phi) = A + B\phi^4 \ln\phi^2 - C\phi^2 + D\phi^4 + \cdots \tag{5.15}$$

このポテンシャルをグラフで表すと，図 5-2 のようになる．$\phi = 0$ 付近の平らな部分

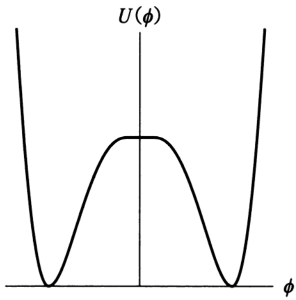


図 5-2 コールマン－ワインバーグ型ポテンシャル

ではスローロール近似が成り立って，場の値がゆっくり変化しながらインフレーションが生じ，あるところから急激にポテンシャルの谷に落ち込んで再加熱が起きるので，インフレーションのシナリオを実現できる有望なモデルと思われた．

しかし，その後，このモデルにはさまざまな問題があることがわかってきた．例えば，素粒子論によってヒッグス場に求められる条件と，平坦性問題・地平線問題を解決するために必要な（インフレーションの継続時間などの）条件を満たすためには，係数をかなり細かく調整しなければならない．このため，インフラトン場とヒッグス場を同一視する理論は，現在ではあまり真剣に取り上げられなくなった．

コールマン－ワインバーグ型ポテンシャルは扱いに便利なので，ヒッグス場とは別にインフラトン場を導入する場合でも，これと同様の形をしたポテンシャルがしばしば用いられる．ヒッグス場ならば，最初は $\langle\phi\rangle = 0$ の状態にあり，そこからポテンシャルの底に向かって転がっていくが，インフラトン場はどこから始まっても良いので，$\phi > 0$ の領域だけを考えることが多い．ポテンシャルの形が式で与えられていれば，(5.14) 式の H などが係数を使って表されるので，揺らぎの大きさを計算できる．しかし，実際にこうした計算を行ったところ，観測されている揺らぎを再現するには，係数をかなり精密に微調整しなければならないことがわかった．インフレーション理論は，もともと平坦性問題・地平線問題を解決するために異常な初期条件を設定しなくてもかまわないように導入された理論なので，観測データと一致させるために微調整が必要になるのでは，あまり有難味がない．

ポテンシャルの形を

$$U(\phi) = A\phi^n$$

というシンプルな形にする場合もある．第 3 章図 3-5 に表したポテンシャルは，その一例である．こうしたポテンシャルは，カオス的インフレーションを考えるときにも使われるので，第 8 章 8-2 節で再び取り上げるが，観測データと良く一致するとは言えない．

(5.15) 式よりも一般的なポテンシャルを考える試みも行われている．この場合，ポテンシャルは充分になだらかだとすると，揺らぎのデータを再現するためには，その 2 階および 3 階微分に制限が付けられる．どんなポテンシャルも容認できるとすると，観測データを再現することは常に可能にはなるが，それで自然な理論と言えるかどうか，インフレーション理論の支持者と批判者の間で議論が続いている．

インフラトン場の種類を増やし，より複雑なシナリオを考える理論もある．ソリトンと呼ばれる特殊な解を利用する理論，何段階もの相転移が生じる理論など，まるで物理学者にとってのおもちゃのように，数多くの仮説が検討されている．

5-5節 第2の加速膨張の発見

宇宙初期のインフレーションは，直接的な観測ができず確実な証拠がなかなか得られないもどかしさがある．ところが，打開策をなかなか見いだせずに理論家たちが苦闘していた1990年代後半，インフレーションとは全く別の加速膨張が起きている証拠が超新星の観測データに見いだされ，事態はさらに錯綜(さくそう)してきた．現在の宇宙で起きているらしい第2の加速膨張は，理論的には不明な点が多いにもかかわらず，観測データという確固たる証拠ゆえに，急速に学界で受け容れられつつある．

第1章§1-3-4の末尾で述べたように，ある臨界値以上の宇宙定数を持つフリードマン方程式に従って宇宙空間が膨張する場合，初めのうちは物質の質量に起因する重力の作用で膨張速度が減速するが，物質密度が減少して重力の効果が弱まり，宇宙定数の効果が卓越すると，加速膨張に転じる．こうした可能性があることは1920年代から知られていたが，宇宙定数をゼロよりほんの少し大きい値に設定しなければならない点が不自然なせいもあって，あまり真剣に取り上げられなかった．

第4章4-5節で示したように，場の零点エネルギーは巨大な暗黒エネルギーとなるはずだが，理論的に予想される値と観測データとは120桁ほどの開きがある．このため，いまだ知られていない何らかの物理的メカニズムによって，場の零点エネルギーの寄与が抑えられていると仮定せざるを得ない．このとき，零点エネルギーの寄与は，きわめて小さいがゼロとは異なる値に落ち着くと考えるよりも，完全にゼロになってしまうとする方が，シンプルで受け容れやすい（そうでなければならないという根拠はないが）．暗黒エネルギーには，零点エネルギー以外にもポテンシャルの最小値などが寄与するが，最も寄与の大きい零点エネルギーが完全に打ち消されるからには，他の寄与もなくなると仮定するのが自然だと思われた．

このシンプルでわかりやすい仮定に反するデータが報告されるのは，1990年代後半になってからである．この時期に行われた超新星の距離－後退速度の観測データに基づいて，現在の宇宙が第2の加速膨張を行っている可能性が浮上し，暗黒エネルギーが現実に宇宙の進化を支配しているという見方が広まってきた．宇宙初期にあった第1の加速膨張であるインフレーションは，宇宙全体が急激に何十桁も拡大されるものだが，第2の加速膨張は，今のところ遥かに穏やかで，宇宙がバラバラになるところまではいっていない．

宇宙空間がどのように膨張してきたかは，遠方にある天体や銀河までの距離と後退速度の関係を調べることで明らかにできる．天体や銀河は，膨張する空間に対して固有運動をしているが，できるだけ多くのデータを集めて統計的に平均を取れば，距離と後退

速度に関して確実性の高いデータが得られる.

後退速度は，スペクトルを測定することによって決定できる（遠方からの光は，観測地点まで伝わる過程で空間が膨張するために，通常のドップラー効果とは異なる式に従う）. 一方，距離は，後退速度よりも決定するのが遥かに難しい. かなり暗い天体が観測された場合，もともと明るい天体が遠方にあるのか，暗い天体が近くにあるのか，すぐにはわからない. 何らかの方法で天体の絶対等級がわかれば，見かけの等級と比較することによって距離が求められる.

比較的近傍の銀河の場合は，その銀河内部にあるセファイド変光星が利用される. セファイド変光星とは，天体全体が膨張と収縮を繰り返すことによって明るさが周期的に変化する脈動変光星であり，いくつかの種類があるが，長周期セファイドと呼ばれるものでは，変光周期と絶対等級の間に一定の関係があることがわかっている. このため，周期の測定によって絶対等級が決定され，これと見かけの等級を比較することで距離が割り出される. セファイド変光星は太陽よりも最大で 10 万倍ほど明るいため，ハッブル宇宙望遠鏡などを用いれば，数億光年程度の遠方にあるものまで測定できる. しかし，数億光年程度では，宇宙空間全体の膨張を精密に測定するには不充分である. セファイド変光星よりも遥かに明るい天体で，絶対等級を推定することのできるものが必要となる.

そこで考案されたのが，超新星を標準光源として距離の決定に用いる方法である. 超新星とは，恒星がその生涯の最後に起こす大爆発のことで，1 つの銀河の中では 100 年に 1 回程度の割合で発生する. 天の川銀河の内部では，1604 年に観測されたケプラーの星以降は観測されていないが，1987 年に，天の川銀河から 16 万光年の距離にある大マゼラン雲に超新星が現れ，光だけではなく，そこから飛来したニュートリノも検出された.

超新星にはいくつかのタイプがあるが，Ia 型と呼ばれるものは，連星系を構成する白色矮星（わいせい）にもう 1 つの恒星からガスが流入し，チャンドラセカール限界と呼ばれる一定の質量に達したときに爆発を起こすので，爆発による明るさもほぼ同じになる. このため，Ia 型超新星の見かけの等級が観測されれば，絶対等級と比較することにより，おおよその距離がわかる. Ia 型超新星の明るさは太陽の 50 億倍程度であり，数十億光年彼方のものまで観測できるため，宇宙全体の膨張速度の変化を調べるのに利用できる.

ただし，Ia 型超新星の明るさは「ほぼ」一定であるものの，完全に同じではなく，多少のばらつきがある. このばらつきを何とかしなければ，確実に距離を決定することはできない.

ばらつきを抑える 1 つの方法が，減光曲線を利用するというものである. 超新星は，爆発直後に最も明るくなった後，明るさを急激に減じていく. 時間とともに明るさがど

う変化するかを示すのが減光曲線である．Ia 型超新星の質量や組成が全て同じならば，減光曲線も等しくなるはずだが，実際にはそうではない．比較的近くにあり，別の方法で距離を決定できる Ia 型超新星の減光曲線を精査したところ，明るい超新星ほどゆっくり減光していくことが明らかになった．したがって，減光曲線をきちんと調べれば，超新星の正確な明るさ（絶対等級）が決定できるはずである．

このことは，口で言うほど簡単ではない．まず，数十億光年の遠方にある超新星の光はきわめて弱く，減光曲線を正確に測定するのは難しい．

さらに，もう 1 つの重要な誤差要因がある．数十億光年彼方の超新星から出た光は数十億年ほど前のものなので，それだけ古い宇宙の状態を表している．宇宙の元素のうち，ビッグバンの時期に作られたのはヘリウムだけであり，鉄より軽い元素は恒星内部での核融合で，それより重い元素は超新星の爆発の最中に作られた．したがって，宇宙の元素組成は，時代とともに変化しており，古い天体は，現在のものとは組成が異なっている．通常の元素組成だけではなく，恒星が暗黒物質をどれくらい取り込んだかにも差がある．現在とは組成の異なる数十億年前の超新星の減光曲線が，近傍の銀河に属し，たかだか数億年前に爆発した超新星のものとどこまで正確に一致するのかという疑問もある．

また，遠方の超新星からの光は，数十億年前の宇宙空間を通り抜けてくるが，そこにある塵の組成も現在とは異なっているはずであり，光の吸収され具合も違っているかもしれない．とすると，絶対等級と見かけの等級を比較して距離を決定する方法に，誤差が混入することになる．

こうした誤差要因は完全に取り除けたわけではないが，これまでの知見に基づいて可能な限り誤差を潰していき，超新星の絶対等級と見かけの等級を比較する試みが行われた．この暫定的なデータに基づいて宇宙の膨張速度の変化を調べたところ，従来，支配的な見解であった宇宙空間の膨張が減速していたというデータとは合わないことがわかった．

そこで，宇宙定数（インフラトン場のポテンシャルの最小値と言っても良い）の存在を仮定してデータと比較したところ，宇宙が開いているか閉じているかの境となる臨界エネルギー密度に対する比として宇宙定数を表した場合，

$$\Omega_\Lambda = 0.73$$

と仮定したときに観測データとの一致が最も良いという結果が得られた．WMAP による宇宙背景放射のデータからも，Ω_Λ として 0.76 という値が得られており，宇宙に存在するエネルギーのおよそ 3/4 が暗黒エネルギーであることが示唆されている．

インフレーション期の急激な加速膨張がインフラトン場のエネルギーによって引き起

こされているのに対して，第 2 の加速膨張がどのようにして起きているかははっきりしていない．いまだ不明な点は多いものの，われわれの住む宇宙が以前に考えられていたほど単純に膨張しているのでないことは，確かなようだ．

第 III 部

宇宙の始まり

第1章で記したように，フリードマン方程式の現実的な解は，過去のある時刻に宇宙が誕生したことを示す．閉じた球面状空間の場合は，半径が無限小の宇宙が突如として現れ，膨張していくことになる．これは，数学的なモデルとしては何ら矛盾はなく，われわれの住むこの宇宙が，そのようにして誕生したという可能性は否定できない．これが，宇宙がどのように始まったかという問いに対する最終的な解答なのだろうか？

宇宙が突如として現れることは，エネルギー保存則に反すると思われるかもしれないが，そうではない．第4章で説明したように，エネルギー保存則とは，時間に関する並進対称性から導かれる法則であり，時間が経過しても物理法則が変わらないことの帰結である．ところが，ある時刻に宇宙が誕生するフリードマン模型では，宇宙誕生以前の時間が存在しないので，エネルギー保存則の前提となる時間の並進対称性が成り立っていない．したがって，宇宙誕生とともに有限のエネルギーが存在することになったとしても，物理法則に反する訳ではない．姿を変えながら総量が不変になるものとしてエネルギーをイメージすると，突然の宇宙誕生が物理法則に反するように思えるだろうが，このイメージの方が誤解なのである．

しかし，たとえ式の上で何の矛盾がなくても，宇宙が突然誕生することは，どうもすんなりと受け容れにくい．このため，フリードマンがこうした模型を提唱した1920年代から，何人もの研究者が，より納得できるようなアイデアを探ってきた．

そもそも，宇宙の始まりについてどのように考えるべきなのだろうか？ これは，既知の理論から演繹的に解が得られる問題ではなく，何らかの指導原理に基づいて方針を決めなければならない．どのような指導原理を採用するかは人によって異なり，簡単に分類することはできないが，ここでは，ごく大まかに，次の3つのタイプに分けてみたい．

① 原初的な安定状態から宇宙が生まれたというアイデア．

② 宇宙は永劫の過去から周期的ないし定常的な変化の中で続いてきたというアイデア．

③ この宇宙とは性質が異なる，あるいは，この宇宙の性質を包摂するようなマザーユニバースからこの宇宙が派生してきたというアイデア．

次の第6章では，①のアイデアに関して述べていこう．②の周期的な宇宙は第7章で，定常的な宇宙については，③のマザーユニバースのアイデアとあわせて第8章で取り上げる．

第6章

原初的原子からの誕生

第3章〜第5章で述べたインフレーション理論は，初期の宇宙が単純なフリードマン模型では記述されないことを示した．だが，インフレーション理論を始まりの瞬間にまで外挿しても，フリードマン模型の不満が解消できる訳ではない．

問題の所在をはっきりさせるために，物質が存在しないときのフリードマン方程式を考えよう．第1章 (1.45) 式は，圧力項がないときの式で，$k=+1,-1,0$ のそれぞれの場合が，閉じた／開いた／平坦な空間を表している．ここで，物質が存在しないものとして $M=0$ と置けば，k のそれぞれの値に対する解が次のように求められる．

$$k=\begin{cases} +1: & a=\dfrac{1}{\alpha}\cosh(\alpha t) \\ -1: & a=\dfrac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t) \\ 0: & a=C\exp(\pm\alpha t) \end{cases} \qquad \left(\alpha=\sqrt{\lambda/3}\right) \tag{6.1}$$

いずれの解も，t が $1/\alpha$ より充分に大きいときには，同じ指数関数的な空間膨張を表す．しかし，この式がどこまでも成り立つとして時間を遡っていくと，おかしなことになる．$k=+1$ の閉じた空間では，球面状空間の半径が $t=0$ で最小になり，それ以前では，時間を遡るにつれて半径が際限なく大きくなっていく．始まりの謎がなくなった代わりに，空間が無限の時間を掛けて収縮した後，再び際限のない膨張に転じるとう理解しがたい状況になる．一方，$k=-1$ では，$t=0$ の瞬間に突如として大きさが無限大の空間が生まれることになり，始まり方の奇妙さという点ではフリードマン模型と変わりない．このような振舞いは物質を含んでいる場合でも同様で，平坦でない一様等方空間でのアインシュタイン方程式の一般的な解は，無限の時間を掛けた収縮・膨張か，ある瞬間に突如として現れるか——のどちらかになる（閉じた場合については，第1章 §1-3-4 で説明してある）．$k=0$ ならば，無限小の空間が無限の時間を掛けて大きくなるという比較的イメージしやすい模型になるが，空間は初めから平坦だったと仮定せざるを得ないので，その解決のためにインフレーション理論を導入した平坦性問題を，また

ぞろ蒸し返すことになる．

このように，始まりの謎がインフレーション理論の枠内で解決できるとは考えにくい．インフレーションはあくまで一時的なものと考え，インフレーション以前の状況を理論化しなければ，始まりの謎は解決しないのである．

6-1節　原初的原子のアイデア

フリードマンは宇宙が膨張を始める前の状態について何も述べていないが，ルメートルは（カトリック司祭であるせいか）当初からこの問題に向き合ってきた．彼が注目したのは，（第1章§1-2-4で示した）アインシュタインの静止宇宙である．アインシュタインの静止宇宙は，物質同士が引き合う引力と宇宙項による斥力が完全に釣り合って平衡状態を実現したものだが，この釣り合いは力学的に不安定であり，ほんのわずかでも揺らぎがあると，たちまち膨張あるいは収縮に転じる．1927年，ルメートルは，静止宇宙の釣り合いが破れて膨張を始める模型を考案し，空間膨張による銀河系外星雲（銀河）の後退がドップラー効果として観測できることを指摘した（ついでに言っておくと，多くの宇宙論の教科書で「ルメートル模型」と名付けられているのは，この模型ではなく，ルメートルのアイデアをもとに後から作られたもので，実はフリードマンが既に発表していたのと同じ模型である）．

しかし，アインシュタイン方程式に基づく膨張宇宙のアイデアだけでは，宇宙の始まりの謎を解明するのに不充分である．宇宙の進化によって天体が形成され生命が誕生するためには，宇宙の始まりが高い秩序を持つ状態——熱力学の用語を使えばエントロピーが充分に小さい状態——でなければならない．アインシュタイン方程式を解く場合，最初の状態は境界条件として外から与えるものであって，方程式をいくらひねり回しても高い秩序状態が得られるはずがない．なぜ，宇宙はきわめて高い秩序を持つ状態から始まったのか？　この究極的なアポリアとも言える問題は，1931年にエディントンによって指摘された．

エディントンの指摘に答える形でルメートルが提案したのが，量子論を援用する方法である．当時は，原子・分子のエネルギー準位などを量子論的に計算する手法が普及してきた頃だが，この最新の成果をもとに，ルメートルは，全宇宙の物質が集まって単一の原子を形成したものが宇宙の最初の状態だというアイデアを発表した．先の宇宙模型と結びつけると，静止宇宙全体が1個の原子ということになる．論文で詳しい議論はなされていないが，縮退（同一のエネルギー準位にいくつもの状態があること）のない最低エネルギー状態では状態数が1であり，状態数の対数として定義されるエントロピー

がゼロになることを利用して，宇宙全体のエントロピーが小さいことを説明する試みだと解釈することができる．

残念ながら，このアイデアは，オリジナルのままでは使えない．アインシュタインの静止宇宙はきわめて不安定であり，その内部で単一の原子と見なせる状態が実現できるとは，到底考えられないからである．しかし，量子論を使って宇宙全体の最初の状態を記述するという方針は，現在でも充分に興味深いもので，本章 6-6 節で紹介するヴィレンキンの試みにも通じるものがある．

ルメートルは，さらに，放射性崩壊と同じようにして，原初的原子が小さな粒子に崩壊していく可能性を指摘した．ここで想定されたのは，アルファ崩壊のように，外部から何の作用を受けていないにもかかわらず，原子核が構成粒子の一部を放出して小さくなっていく現象だと思われる．アルファ崩壊は，準安定な状態から一定の確率でアルファ粒子が放出される過程であり，そのメカニズムは，1928 年にガモフが量子論の**トンネル効果**に基づいて解明していた．ルメートルのアイデアを少し敷衍（ふえん）すると，宇宙は準安定な量子論的状態から始まり，トンネル効果によって膨張する宇宙へと変化したことになる．

このように宇宙全体を量子論的に扱う議論が，量子宇宙論の要である．第 II 部のインフレーション理論は，物質に関しては量子場を考えるが，重力は量子化されないままという半古典論の手法を用いていた．これ以降は，時空に関しても量子論的な方法を採用することになる．ただし，量子重力理論はいまだ完成していないので，重力場の全ての成分に関する量子揺らぎではなく，スケール因子の量子揺らぎに限定した議論しかできない．

6-2 節　ポテンシャル障壁とトンネル効果

トンネル効果によって宇宙が始まったという理論を紹介する前に，トンネル効果とは何かを簡単に解説しておきたい．

トンネル効果が典型的に見られるのは，ポテンシャル障壁を粒子が透過するプロセスである．現在では，フラッシュメモリーに書き込みする場合など，半導体での電子の制御に積極的にトンネル効果が活用されている．ここでは，粒子の運動をもとにトンネル効果について簡単に解説するが，宇宙全体に適用する場合には厳密な式を必要としないので，やや粗い近似を用いて話を進めることにする．

粒子がポテンシャル内部で 1 次元の運動する場合を考えることにしよう．粒子の質量を μ，エネルギーを E，座標を q，ポテンシャルを $U(q)$ とすると，粒子の量子論的な運

動を表すシュレディンガー方程式は，第 2 章 (2.10) 式と (2.11) 式で表される．念のため，2 つの式をまとめたものを，改めて書いておこう．

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dq^2}+U\right)\Psi = E\Psi \tag{6.2}$$

量子論の一般論で知られているように，このときの波動関数 $\Psi(q)$ は，粒子が座標 q の位置に存在する確率振幅を表しており，一定の運動量で運動する場合は，正弦波になる．

古典論では，$E < U$ となる領域には粒子が進入できない．したがって，ポテンシャルのピーク値より小さなエネルギーを持つ粒子は，必ずポテンシャル障壁で跳ね返される．しかし，量子論では粒子の運動に波動性があり，ポテンシャル障壁内部に進入できるので，障壁を透過する確率がゼロではなくなる（量子場理論では電子のような素粒子はもともと波動のはずだが，ここでは，粒子を量子論的に扱うという立場で説明する）．このように，古典論では透過できないポテンシャル障壁を量子論的な対象が透過してくる現象が，トンネル効果の現れである．

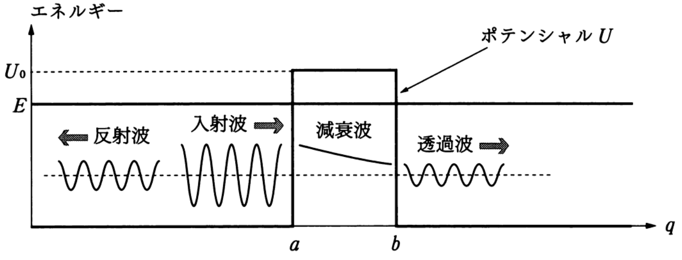


図 6-1　トンネル効果によるポテンシャル障壁の透過

特に簡単なケースとして，図 6-1 のように，$q < a$ と $q > b$ では $U(q) = 0$，$a < q < b$ では $U(q) = U_0$（定数）となるポテンシャルが存在し，ポテンシャル障壁が存在する領域に，$q = -\infty$ から，ポテンシャルのピーク値 U_0 よりも小さなエネルギー E を持つ粒子が飛んでくるものとする．波動関数と粒子の関係をイメージするために，粒子の密度が一定になるようなビームが照射されている場合を想定すれば良いだろう．このケースでは，微分方程式 (6.2) を厳密に解くことができるが，ここでは，トンネル効果を定性的に理解することを優先して，簡略化した議論を行う．

(6.2) 式の解は E と U の大小関係によって大きく変わる．$E > U$ ならば，(6.2) 式は振動解

$$\Psi = C_1 \exp\left(\pm i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu\,(E-U)}q\right) \tag{6.3}$$

を持つ．時間 t を含む波動関数には

$$\exp\left(-iEt/\hbar\right)$$

という因子が掛かるので，この振動解は，(6.3) 式の複号がプラスのときは q 軸の正の向き（右向きとする）に，マイナスのときは負の向きに伝播する進行波を表す．

一方，$E < U$ になると，進行波ではなく，振幅が指数関数の形で変化する波になる．

$$\Psi = C_2 \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu\,(U-E)}q\right) \tag{6.4}$$

現実的な方程式の解は，次の漸近条件（①と②）と接続条件（③）を満たさなければならない：

① $q = -\infty$ で与えられた振幅（1 とする）を持つ右向きの進行波（入射波）が存在する（これ以外に，逆向きの反射波が存在しても良い）．

② $q = +\infty$ で右向きの進行波（透過波）だけが存在する．

③ $q = a, b$ で波動関数の値 Ψ と q で微分した値 Ψ' が連続になる．

①と②の漸近条件から，未知数は，反射波の振幅（C_R とする）と透過波の振幅（C_T とする），および，ポテンシャル内部で減衰する成分と増大する成分の 2 つの係数となるので，あわせて 4 つある．この 4 つの未知数は，③の接続条件を満たすために必要な 4 つの式を使って，全て求めることができる．

ここで，定性的な振舞いを見るために，もう少し議論を簡略化しよう．詳しい説明は省略するが，シュレディンガー方程式 (6.2) の解として滑らかな関数を選ぶと，自動的に確率が保存されることがわかっており，③の接続条件が満たされる場合には，反射する流束と透過する流束の和は，入射する粒子の流束（振幅を 1 に取ってある）と等しくなる．波動関数が表すのは確率振幅であり，確率の式に直すためには絶対値の 2 乗を取る必要があるので，結局，次の式が成立する．

$$1 = |C_R|^2 + |C_T|^2$$

反射波と透過波のどちらの振幅が大きくなるかはポテンシャル障壁と入射エネルギー E の関係によって決まるが，ここでは，ポテンシャル障壁が充分に大きく，トンネル効

果が起きにくい場合を考える.

$$\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu\left(U_0 - E\right)}\left(b - a\right) \gg 1$$

このとき，透過波の振幅はきわめて小さくなり，$q = b$ で接続条件が満たされるためには，(6.4) 式の複号がプラスになる成分の係数も充分に小さくなければならない．そこで，この成分を無視して，ポテンシャル障壁に進入した波は指数関数的に減衰すると言ってしまうことにしよう．この簡略化した議論によれば，高さが一定のポテンシャル障壁の場合，障壁内部の波動関数は，間隔 Δq の間に

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu\left(U - E\right)}\Delta q\right) \tag{6.5}$$

というファクターだけ減衰する．したがって，a から b まで一定値を取るポテンシャル障壁では，(6.5) 式で $\Delta q = b - a$ と置いた値が波動関数の減衰ファクターとなる．確率を求めるには，波動関数の絶対値を 2 乗しなければならないので，ポテンシャル障壁を通り抜ける透過確率 T は，(6.5) 式の減衰ファクターを 2 乗したものに近似的に等しい．

正確な透過確率を求めるには，接続条件などを適用して入射波・反射波・透過波の振幅を計算する必要があり，減衰ファクターの他に，E や U_0 に依存する項が現れる．

この議論は，物理学の話としてはやや簡略化しすぎている．もう少しきちんとした議論をするためには，量子論の参考書でトンネル効果や WKB 近似（半古典近似）について勉強していただきたい．WKB 近似について詳しく書かれた教科書としては，メシア著『量子力学』（東京図書）などがある．

以上の議論は，ポテンシャルが定数ではない場合にも，近似的に適用可能である．ポテンシャル U が，図 6-2 のように，$a < q < b$ の範囲でのみ $U > E$ になっているものとする．粒子の波動関数は，$-\infty$ から右向き進行波として伝播してくるが，$q = a$ に達すると，反射されて $-\infty$ へ向かう反射波と，減衰しながら $U > E$ の領域に進入する波に分かれる．減衰していく波が $q = b$ に達すると，その先は $+\infty$ へと伝播する透過波になる．a から b までの間で減衰する割合は，U が一定の場合と同じだと仮定すると，(6.5) 式の減衰ファクターを q で積分したものになるはずである．この（必ずしも正しくない）仮定を認めるならば，粒子がポテンシャル障壁を透過する確率 T は，減衰ファクターの 2 乗に比例するので，次式で与えられる．

$$T \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dq\sqrt{2\mu\left(U - E\right)}\right) \tag{6.6}$$

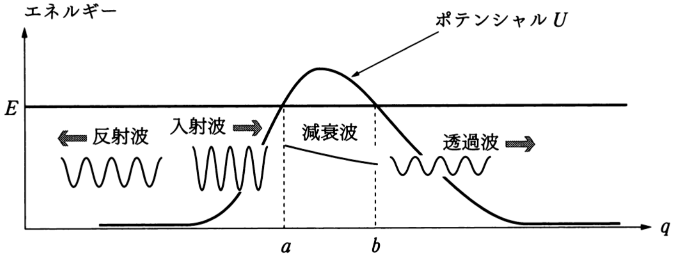


図 6-2　ポテンシャルが階段型でないときのトンネル効果

(6.6) 式を求める論法は，きわめて粗っぽく見えるかもしれない．だが，ポテンシャル U があまり激しく変化せず傾きが小さい，(6.6) 式右辺の値が充分に小さい——といった条件が満たされていれば，精密ではないものの見積もりには充分な近似で成立する．(6.6) 式は透過確率が右辺に比例するという形で表されているが，多くの場合，比例係数は 1 と同程度の大きさになるので，透過確率のおおよそのオーダーを決定するのは，(6.6) 式右辺の値である．

ここまでの議論では，ポテンシャル障壁に向かって入射する粒子を考えてきたが，初めに束縛状態にある粒子を考えることもできる．例えば，図 6-3 のような井戸型ポテンシャルに束縛されていた粒子が，トンネル効果でポテンシャル障壁を透過して，外部に

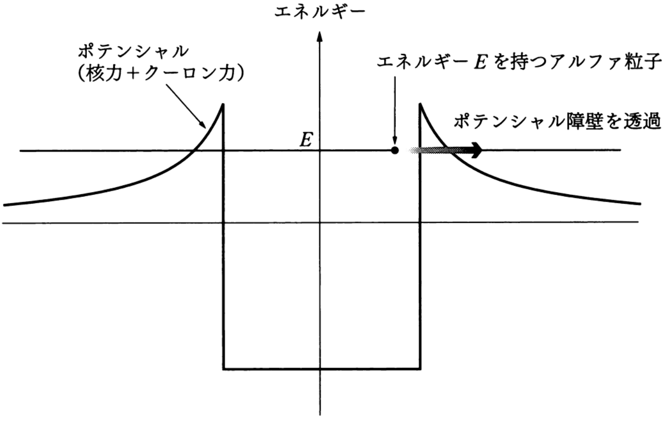


図 6-3　トンネル効果によるアルファ崩壊

飛び出すことも可能である．アルファ崩壊の理論は，このような形で理論化された．

トンネル効果の応用は，半導体における電子の振舞いのように，ポテンシャル障壁を透過する粒子の運動に関するものがほとんどである．だが，この効果自体が粒子の運動に限定される訳ではない．粒子の運動でトンネル効果が起きるのは，古典論では実現されない過程が生じるからだが，こうした過程は，量子論では一般的なことである．第2章2-3節で述べたように，量子論的な過程は，作用が最小となる古典解の経路だけでなく，量子揺らぎという形で他の経路を常に含んでいる．したがって，トンネル効果は，ポテンシャル障壁を透過する粒子の運動に特有なものではなく，あらゆる量子論的な対象に起こり得る現象である．

トンネル効果が量子論的な対象で一般に見られることは，次のような（かなり大ざっぱな）考察からもわかる．

第2章で示したように，量子論では，基礎方程式に従わないものも含めてさまざまな経路を加えあわせている（第2章(2.9)式では粒子の運動に関する経路積分を示したが，同様の式は，量子場を含む全ての量子論的な対象で成立する）．多くの場合，最も大きな寄与を与えるのが，作用が最小になる経路（すなわち，ラグランジュ方程式の解となる経路）である．これは，そこからわずかに経路をずらしても作用の値が変わらないので，指数関数 $\exp(iS/\hbar)$ がゼロの周りで振動して打ち消しあうことがないからである．したがって，さまざまな経路を加えあわせる経路積分は，古典解からの寄与で代表させられることが多い．

$$\sum e^{iS/\hbar} \sim e^{iS_c/\hbar}$$

添字の c は，古典解を考えていることを示す．

粒子の運動の場合，古典解の作用は，運動方程式の解を作用の式に代入したものに等しい．ただし，トンネル効果を議論する場合は，粒子が一定のエネルギーを持つという条件を課していることに注意しなければならない．作用 S は，ラグランジアン L の時間積分で表されており，積分端の時間 t の関数となっているが，エネルギー一定という条件にするためには，遷移振幅をフーリエ変換して，特定のエネルギーを持つ状態だけを抜き出す必要がある．このため，遷移振幅の計算では，次のような式を考える．

$$\int dte^{iS_c(t)/\hbar+iEt/\hbar} = \int dt \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2 - U(x_c) + E\right\}\right]$$

x_c は運動方程式を満たす古典解である（積分の範囲に関しては，もう少しきちんとした議論が必要になるが，ここでは省略する）．古典解は運動方程式に従い，エネルギー保存則を満たすので，次のような書き換えが可能である．

$$\int_0^t dt \left\{ \frac{\mu}{2} \left(\frac{dx_c}{dt} \right)^2 - U(x_c) + E \right\} = \int_0^t dt \mu \left(\frac{dx_c}{dt} \right)^2$$
$$= \int_{x_i}^{x_f} dx_c \mu \left(\frac{dx_c}{dt} \right)$$
$$= \int_{x_i}^{x_f} dx_c \sqrt{2\mu (E - U)}$$

x_i と x_f は，古典解の両端の座標である．古典解では一方向的に運動し，x の時間微分は符号を変えないものとした．

この式からわかるように，トンネル効果に現れる (6.5) 式の減衰ファクターは，古典解が存在しない $E < U$ となる領域まで古典解を使った経路積分の式を外挿したものになっている．古典解のない領域では，時間 t を実数に取る限り，作用の最小値は存在しない（存在するならば古典解があるはずである）．だが，虚数の時間を用いると，最小値（正確に言えば停留値）が存在することが示される．古典解が存在しないときの経路積分は，この虚数の時間を用いることで，数学的に厳密に導くことができる．

多くの量子力学の教科書において，トンネル効果は，粒子がポテンシャル障壁を透過する現象として説明され，透過確率は粒子のシュレディンガー方程式を解いて求めている．しかし，トンネル効果の減衰ファクターが経路積分の式を使って表されることから推測できるように，この効果は量子論的なシステムで一般的に見られる現象であり，(6.6) 式は粒子の運動に限らず成立する．

トンネル効果が量子論的な対象一般に見られるものだとすると，宇宙全体がトンネル効果によって始まったという可能性も充分に現実味を帯びてくる．宇宙全体を量子論的に記述できたとして，時間変化しない（準）安定な状態と膨張する状態が存在し得るならば，トンネル効果によって，前者から後者への遷移が起きたとも考えられる．

しかし，ここで問題が生じる．そもそも，宇宙全体を量子論的に記述することが可能なのだろうか？　この問題は，「宇宙の波動関数とは何か」という厄介な議論を引き起こす．

6-3 節　宇宙の波動関数

宇宙全体の量子論的な状態を完全に記述するには，重力場と物質場の全ての量子揺らぎを表す関数が必要になるが，こうした関数を考えるのは現実的ではない．また，重力場の量子揺らぎについての理論（いわゆる量子重力理論）は完成しておらず，既知の手法で重力場の量子揺らぎを計算することはできない．そこで，正しそうな近似的理論を

模索することになる．

まず，重力場に関しては，スケール因子 a の一様等方空間として表されるバックグラウンド計量とそこからのずれの部分に分離し，天体などによる重力を含む後者の効果は古典論（アインシュタインの重力理論）で扱うことにする．量子論的な効果は粒子・波動の二重性として現れるが，重力の場合，粒子的な状態である重力子も波動的な状態である重力波も観測されていないので，その大部分を古典論で扱うことは，現実的である．この手法を用いると，重力場に関する量子論的な変数は，スケール因子 a だけになる．

スケール因子を別にすれば，重力場は古典論で，物質場は量子論で扱われることになるが，これだけでは，まだ計算はできない．さらに，スケール因子と物質場の量子論的な振舞いは完全に分離されているものと仮定する．この仮定を認めるならば，宇宙全体の量子論的な状態は，次のような関数で表されるはずである．

$$\Psi(a)\,\chi(q;a)$$

$\Psi(a)$ は，スケール因子 a を量子論的な変数とする波動関数で，一様等方な物質場の状態（以下の議論では物質密度 ρ を考えるが，より一般的には，電磁場などによるエネルギー密度や圧力も含まれる）は，スケール因子が a のときアインシュタイン方程式を満たす量として与えられる．一方，$\chi(q;a)$ は，スケール因子 a が（量子揺らぎを含まない量として）与えられたときの物理的状態を表す関数で，時空の計量が定まっているときの物質の状態を量子論的に扱う既知の手法で計算できる．したがって，宇宙全体の量子論的な状態を考える際に新たに問題になるのは，$\Psi(a)$ である．これが宇宙の波動関数である．

$\Psi(a)$ が何を意味しているか，はっきりとわかっている訳ではない．粒子の波動関数 $\Psi(q)$ ならば，粒子が位置 q に存在する確率振幅（絶対値を2乗すると確率になる量）として解釈できるが，宇宙の波動関数に対して，こうした解釈はうまく適用できない．何を意味するかはよくわからないが，ともあれ，$\Psi(a)$ が満たす方程式——ホイーラー－ドウィット方程式——を求めることにしよう．

6-4節　ホイーラー－ドウィット方程式

粒子の量子論の場合，ポテンシャル U が与えられたときのシュレディンガー方程式がどうなるかは，第2章2-3節に示しておいた．それと同じ考え方が，宇宙の波動関数 $\Psi(a)$ に対しても適用できると仮定しよう．この仮定に基づいて，まず，スケール因子 a が満たす方程式をポテンシャルを使って表し，それを使って $\Psi(a)$ の方程式を導くこ

とにする．

一様等方空間におけるスケール因子の方程式は，アインシュタイン方程式の対角項の空間成分と時間成分の 2 種類があり，閉じた球面状空間で圧力が無視できる場合は，第 1 章 (1.34) 式と (1.35) 式となる．ここでは，さらに話を簡単にするために，物質密度 ρ もゼロの場合を考えよう（物質密度や圧力がゼロでない場合は，次の 6-5 節で論じる）．このときの方程式は，((1.34) 式と (1.35) 式を少し変形して）次の 2 つになる．

$$a + a\dot{a}^2 - \frac{1}{3}\lambda a^3 = 0 \tag{6.7}$$

$$1 + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - \lambda a^2 = 0 \tag{6.8}$$

ρ がゼロでない場合，2 つの方程式は独立であり，物質密度に関する保存則（第 1 章 (1.36) 式）を使うことによって，a に関する微分方程式の数を減らすことができる．しかし，$\rho = 0$ と置くと，保存則は恒等的に満たされ，(6.7) 式を時間で微分した結果から (6.8) 式を導くことができるので，2 つの式は独立ではない．これらの方程式の解は，(6.1) 式の 1 番目にある cosh 関数で表され，宇宙全体が収縮から膨張に転じるという非現実的なものになる．ここでは，時間についての 2 階微分が含まれる (6.8) 式の方を基礎方程式と見なすことにする．

ここで，次のラグランジアンを考えよう．

$$L\left(a, \dot{a}\right) = \mu\left(a\dot{a}^2 - a + \frac{1}{3}\lambda a^3\right) \equiv \mu a\dot{a}^2 - U\left(a\right) \tag{6.9}$$

(6.8) 式が，(6.9) 式のラグランジアンから導かれるラグランジュ方程式と一致することは，次の式から直ちに確かめられる（本書では一貫してドットを ct による微分として定義しているので，係数に余分な c が付いている）．

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 2\mu\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \mu\left(\dot{a}^2 - 1 + \lambda a^2\right)$$

係数の μ は，ここでは未知の定数として扱う．以下の式変形では，あたかも質量のような形で現れるが，実際には質量ではなく，重力と物質の相互作用の関係を定める．実は，μ の符号がどうなるかという大きな問題があるのだが，本書では，この問題に深入りしない．

(6.9) 式のラグランジアンは，ここで議論したように方程式から求めるのが簡単だが，より原理的な方法として，一般相対論のラグランジアンを利用するやり方もある．重

力場と物質場の双方を含むラグランジアンを（量子化していない）一般相対論に基づいて作り，重力場がロバートソン・ウォーカー計量になると仮定してスケール因子を使ってラグランジアンを書き換えると，表面積分になる項を別にして (6.9) 式と同じ形のものが得られる．

ただし，方程式から求めるにせよ，一般相対論のラグランジアンを利用するにせよ，古典論のラグランジアンを使って宇宙の波動関数が従う方程式を導くという議論が重力場の量子化として正当な方法かどうかは，必ずしも明らかでない．

ここで，次式で定義される新しい変数 q を導入する．

$$q = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^{3/2} \tag{6.10}$$

q と a は (6.10) 式によって相互に変換することができるので，$q = q\,(a)$，$a = a(q)$ と表すことができる．(6.10) 式の両辺を時間で微分すれば，

$$\dot{q} = \sqrt{2}a^{1/2}\dot{a}$$

となるので，(6.9) 式のラグランジアンは，直ちに次式に書き換えられる．

$$L\,(q, \dot{q}) = \frac{\mu}{2}\dot{q}^2 - U\,(a\,(q)) \tag{6.11}$$

これは，（第 4 章 (4.1) 式と同じ形になっていることからもわかるように）質量 μ の粒子がポテンシャル $U\,(a\,(q))$ の内部を運動するときのラグランジアンと一致する．(6.11) 式のラグランジアンからラグランジュ方程式を求めれば，(6.8) 式を変数 q で書き直したものが得られる（(6.8) 式と同じ方程式が得られることは，(6.10) 式の変数変換が解析力学で正準変換と呼ばれるタイプのものであることから保証される）．

節の冒頭でも述べたように，宇宙の波動関数 $\Psi\,(a)$ が従う方程式は，粒子の運動に関するシュレディンガー方程式と同じ形になると仮定する．この仮定は，正準量子化と呼ばれる手法が宇宙の波動関数に対しても適用可能であることを意味する．これを認めると，波動関数 $\Psi\,(a)$ は，(6.2) 式に従う（(6.2) 式は変数 q で微分する方程式なので，それに応じて波動関数も $\Psi\,(a\,(q))$ と表す）．

ただし，これだけでは，まだ方程式が完全に決定された訳ではない．シュレディンガー方程式の右辺に現れるエネルギー E の値を評価する必要がある．

粒子の運動の場合と同様に考えれば，エネルギー E は，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和になるので，次式で表されるはずである．

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{q}^2 + U\,(a\,(q)) = \mu\left(a\dot{a}^2 + a - \frac{1}{3}\lambda a^3\right) \tag{6.12}$$

ところが，(6.7) 式からわかるように，この右辺はゼロとなる．したがって，$\Psi(a)$ が従うのは，エネルギーがゼロのシュレディンガー方程式と同じ形のものとなる．

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dq^2}+U\left(a\left(q\right)\right)\right)\Psi=0 \tag{6.13}$$

(6.13) 式が，物質が存在しない場合のホイーラー－ドウィット方程式である．

6-5 節　時間はどこに消えたのか？

第 2 章 2-3 節でも指摘したように，時間に依存する波動関数 $\Psi(x,t)$ は，エネルギー E のシュレディンガー方程式の解 $\Psi(x)$ に対して，

$$\Psi(x,t)=\Psi(x)\exp\left(-iEt/\hbar\right)$$

という関係にある．したがって，$E=0$ という条件は，波動関数が時間に依存しないことを意味する．ホイーラー－ドウィット方程式の解となる宇宙の波動関数は，時間とともに変化する状態を表す訳ではないのである．

これは，ひどく奇妙なことに思えるだろう．6-4 節では，$E=0$ になるという結果を物質が存在しないときのアインシュタイン方程式から導いていたので，物質を導入すると時間依存性が現れると思われるかもしれない．しかし，そうではないことを示そう．

圧力を含む一般的なアインシュタイン方程式は，第 3 章 (3.7)，(3.8) 式として与えてある．未知数は，スケール因子 a，質量エネルギー密度 ρc^2（あるいは，一般的なエネルギー密度 ϵ），圧力 p の 3 つなので，全ての未知数を決定するためには，2 つのアインシュタイン方程式の他に，物質に関する方程式がもう 1 つ必要になる．その方程式として，状態方程式

$$p=w\rho c^2 \tag{6.14}$$

を選ぶことにしよう（この式は，第 3 章 (3.9) 式で $\epsilon=\rho c^2$ と置いたものである）．

第 3 章で示したように，2 つのアインシュタイン方程式を組み合わせると，断熱過程でのエネルギーの保存則（第 3 章 (3.12) 式）が得られる．これと状態方程式 (6.14) を組み合わせれば，次の保存則が導ける．

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^{3(w+1)}\right)=0$$

この式を積分して得られる保存量を M と置くと，ρ がスケール因子 a の関数として表される．

$$\rho = \rho(a) = Ma^{-3(w+1)} \tag{6.15}$$

2 つのアインシュタイン方程式のうち，(3.8) 式は次のラグランジアンから導かれる（この式によって，物質が存在する場合のポテンシャル $U_\rho(a)$ を定義する）．

$$L(a, \dot{a}) = \mu\left(a\dot{a}^2 - ka + \frac{1}{3}\lambda a^3 + \frac{1}{3}\kappa\rho(a)\,c^2a^3\right) \equiv \mu a\dot{a}^2 - U_\rho(a) \tag{6.16}$$

(6.16) 式から (3.8) 式が導けることは，次の関係式を用いればすぐにわかるだろう．

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{3}\kappa\rho(a)\,c^2a^3\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{3}\kappa Ma^{-3w}c^2\right) = -\kappa wMa^{-3w-1}c^2 = -\kappa pa^2$$

ただし，最後の変形には状態方程式 (6.14) を使った．

さらに，(6.10) 式で定義された変数 q を使って (6.16) 式のラグランジアンを書き換えると，第 1 項が質量 μ の粒子の運動エネルギーと同じ形になっていることが示せる．

エネルギー E は，物質がない場合の (6.12) 式と同じように，(6.16) 式のラグランジアンでポテンシャルエネルギーの符号を変えたものに等しい．

$$E = \mu a\dot{a}^2 + U_\rho(a) = \mu\left(a\dot{a}^2 + ka - \frac{1}{3}\lambda a^3 - \frac{1}{3}\kappa\rho(a)\,c^2a^3\right)$$

ところが，この式は，もう 1 つのアインシュタイン方程式（第 3 章 (3.7) 式）によると，必ずゼロになる．したがって，物質を含んだ場合でも，エネルギーはゼロになり，宇宙の波動関数は，時間に依存しなくなる．

エネルギーがゼロになるのは偶然ではなく，深い意味がある．第 4 章で述べたように，エネルギーとは，時間が経過しても物理法則が変わらないことから得られる保存量であり，時間の経過とエネルギーの間には密接な関係がある．実際，解析力学では，エネルギーを力学変数の関数として表したエネルギー関数（ハミルトニアン）は，時間をずらしたときのシステムの変化を導く関数（物理量 A とハミルトニアンとのポアソン括弧式 $\{H, A\}$ を取ると A の時間微分が得られるような関数）として用いられる．ところが，一般相対論では，座標変換に対する不変性が理論の前提として要請されているため，時間をずらすのに使われるエネルギー関数に制限が付き，エネルギーの値がゼロになるのである（「エネルギーの値がゼロになる」というのは必ずしも適切な表現ではなく，「ハミルトニアンを作用させた結果がゼロになるような束縛条件が付く」と言うべきである）．

宇宙の波動関数が時間に依存しないことは，物質の状態を時間の関数として表す通常の量子論とどのように関係するのだろうか？　実は，この解答は，上の議論の中に含まれている．(6.15) 式に示されるように，時間が現れない場合でも，一様等方空間内部の物質の状態は，スケール因子 a の関数として表される．ところが，スケール因子 a はフリードマン方程式を解くことによって宇宙標準時の関数として表すことができるので，物質の状態も宇宙標準時の関数となる．波動関数から時間依存性が消えたように見えるが，スケール因子を通じて間接的に時間が表されると考えれば問題はない．

6-6 節　無からの創造

物質が存在しない閉じた宇宙の場合，ホイーラー－ドウィット方程式に現れるポテンシャル U は (6.9) 式で定義され，グラフで表すと図 6-4 のようになる．

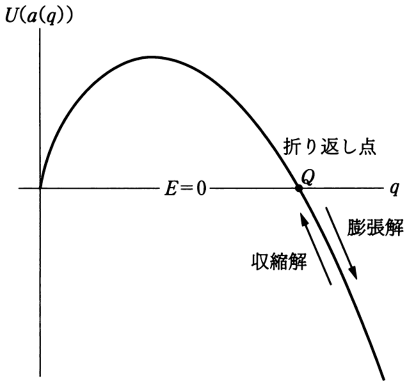


図 6-4　ホイーラー－ドウィット方程式のポテンシャル

もともとのフリードマン方程式の解は，(6.1) 式の 1 番目に記した cosh 関数で表され，$a=+\infty$ から収縮して $U=0$ となる点（$q=Q$ とする）で折り返し，再び $a=+\infty$ へと膨張していく．ポテンシャルの図で言うと，$q>Q$ の範囲でポテンシャルの坂道を上ってきた宇宙が，$q=Q$ で頂点に達した後，今度は坂道を下り始めることになる．

古典論の範囲では，空間は $q>Q$ の範囲で収縮・膨張を行っており，$q<Q$ となることはエネルギーの制限から許されない．しかし，量子論に拡張すると，$q<Q$ の領域

にも波動関数が進入できるため，古典論とは全く異なる現象が生起する可能性が出てくる．

この点に注目したのが，ヴィレンキンである．彼は，電子・陽電子の対生成とのアナロジーに注目した．量子電磁気学によれば，ある値以上のエネルギーを持つ光子（正確に言えば，運動量保存則を満たせる仮想光子）は，電子とその反粒子である陽電子をペアで作り出すことができるが，この陽電子は，式の上では，時間を逆向きに運動する電子であるかのように記述される．しかも，（詳しい議論は省略するが）対生成の過程を量子電磁気学ではなく粒子の量子論を使って計算しようとすると，光子の代わりにトンネル効果と同じ形の式が現れる．そこで，宇宙の場合も，cosh 関数で表される収縮解は，実は，時間を逆向きに進む膨張宇宙であり，収縮から膨張に反転するのではなく，トンネル効果によって 2 つの宇宙が対生成されたと見なすことができないか？——これが，ヴィレンキンのアイデアである．実際，ポテンシャルの形を見ていると，$q=0$ の状態から膨張宇宙の状態へとトンネル効果で遷移することが可能なようにも思えてくる．

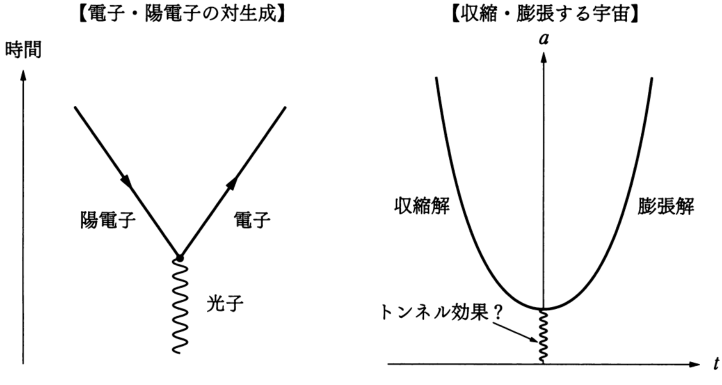


図 6-5　無からの創造

もし，トンネル効果が実際に起こり得るものであり，透過確率として (6.6) 式が使えるとすると，$q=0$ の状態から膨張宇宙へと変化する確率 T が（$E=0$ なので），

$$T \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^Q dq\sqrt{|2\mu U|}\right)$$

という形で与えられる．(6.9) 式で定義される U の形からわかるように，宇宙定数 λ の

値が大きいほどポテンシャルのピークが低くTが大きくなるので，宇宙定数の大きな宇宙ほど現れやすいとも言える．

ただし，こうした議論が直ちに正当化できる訳ではない．6-2 節で議論したように，トンネル効果の式を立てるには，漸近条件と接続条件を考える必要がある．cosh 関数で表される収縮解は，粒子の運動と同じように考えると，$q = +\infty$ からポテンシャル障壁に向かって進んでくる入射波と見なすことができる．一方，膨張解は，入射波がポテンシャル障壁にはじき返された反射波に相当する．したがって，図 6-1 や図 6-2 とは入射波・反射波の向きが逆になり，障壁内部の波動関数は，$q = Q$ から $q = 0$ に向かって指数関数的に減少するはずである．しかし，これでは，$q = 0$ からトンネル効果で宇宙が誕生するというシナリオは成り立たない．

そこで，宇宙に関しては，対生成ではなく，膨張解だけが存在すると仮定してみよう．$q = Q$ で障壁内部の波動関数に滑らかに接続すれば，$q = 0$ の側に増大していく波動関数も可能となる．この波動関数だけ見ると，$q = 0$ からトンネル効果によって膨張宇宙が誕生したようにも思える．

だが，ここでも問題が生じる．$q = 0$ での波動関数の値をどう解釈するかという点である．いま考えているのは $k = +1$ の閉じた宇宙なので，$q = 0$（したがって，スケール因子 a もゼロ）とは，宇宙の半径が無限小の状態である．しかも，$q \to 0$ となる極限を除けば，常に $U > E$ となっているので，$q = 0$ の近傍に束縛状態ができる訳でもない．アルファ崩壊の場合は，図 6-3 に示したように，遠方でのポテンシャルの値より大きなエネルギーを持った粒子が井戸型ポテンシャルの内部に存在し得るため，トンネル効果で外部に飛び出すことが可能となるが，宇宙の場合，$q = 0$ は実現できない状態と考えるべきであり，$\Psi(0) = 0$ と置くのが自然だろう．しかし，こう置いてしまうと，トンネル効果で膨張宇宙が誕生することはできない．

あえて $\Psi(0) \neq 0$ と置いて遷移確率の式を立てることは可能だが，どのような現象が起きたのかをイメージすることができない．アルファ崩壊では，例えば，ラジウムの原子核がアルファ粒子を放出してラドンの原子核に変わるという過程が存在するが，宇宙の場合，ラジウム原子核に相当する状態がない．言うなれば，山を貫くトンネルから宇宙は出てくるのに，山の向こう側が存在しないようなものである．ヴィレンキンのアイデアが「無からの創造」と呼ばれる所以である．

もっとも，宇宙の誕生に関しては，考え方を改めるべきなのかもしれない．多くの人は，現在という時刻だけが現実であり，現実の宇宙が不断に更新されていくと思っているだろう．しかし，第 1 章で強調したように，相対論的な宇宙模型では，時間は空間と同じように単なる拡がりであり，誕生の瞬間から終焉（しゅうえん）の瞬間（そうしたものがあるとすれば）まで時間的に拡がったひとまとまりの宇宙が存在するはずである．宇宙の波動関

数 $\Psi(a(q))$ で $a \to 0$ を考えることは，宇宙がどのように誕生したかという哲学的な問題ではなく，単に宇宙の時間的な端としてどのような境界条件が妥当かという単純な問題にすぎないとも言える．境界条件がわからないのは「宇宙の端」という人間にとって未知の部分を考えているからであり，わからないなりに腑に落ちる境界条件が見つかれば，それで良しとしなければならないのかもしれない．

第7章

振動する宇宙

7-1節　振動宇宙のアイデア

宇宙が過去のある瞬間に始まったという考え方に対して反発を覚え，永遠に続く宇宙を構想する研究者は少なくない．ただし，銀河が互いに遠ざかっていることを示す観測データが得られているので，非定常的でありながら，過去から未来にわたって永続する宇宙のモデルを作らなければならない．こうした非定常的で永続するモデルの中で特に人気があるのが，宇宙は不死鳥のように終焉（しゅうえん）と再生を繰り返すというものである．徹底的に破壊された後に再び甦（よみがえ）る宇宙のイメージは，古代神話の時代からさまざまな形で語られてきたが，20世紀に入ると，一般相対論の枠組みの中で現実的な仮説として検討されるようになった．これが，膨張・収縮を繰り返す振動宇宙のアイデアである．

第5章5-5節で述べたように，現在の観測データによれば，われわれの住む宇宙は加速膨張している可能性が高く，このまま永遠に膨張を続けるという見方が有力である．しかし，再収縮に転じる可能性が完全に排除された訳ではなく，また，振動宇宙は理論的に考察するだけの魅力があるので，本章では，このタイプの宇宙を取り上げよう．

宇宙が膨張・収縮を繰り返しているというモデルは，1922年のフリードマンの論文に始まる．第1章で述べた通り，フリードマンは，一様等方性を持つ閉じた宇宙で（宇宙項の存在する）アインシュタイン方程式の一般的な解の振舞いを3つのパターンに分類したが，このうち，過去のある時点で誕生し，未来のある時点で消滅するというタイプの解は，実は膨張・収縮を一定周期で繰り返す周期解だと解釈した．数学的に扱うと，宇宙が誕生する瞬間は，それ以前の状態に接続できない特異点になるので，周期的な解と解釈することはできない．なぜ，フリードマンがこれを周期解と考えたのか，その理由ははっきりしないが，サイクロイド曲線のようなものを念頭に置いていたのかもしれない．サイクロイド曲線は，θを媒介変数とすると，x, y座標が次式で表される曲線で

ある．

$$x = a\,(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a\,(1 - \cos\theta)$$

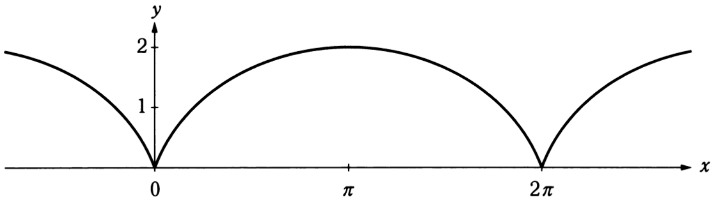


図 7-1 サイクロイド曲線

この式からわかるように，$x = y = 0$ という点で dy/dx は発散するが，θ を使えば x の全ての領域で解析的な関数として表すことができる．フリードマンは，当時の粗い観測データをもとに，約 100 億年の周期で宇宙が膨張・収縮を繰り返していると主張した．

フリードマン以降も，宇宙背景放射の理論で知られるディッケや，ランダウと共に著した理論物理学の教科書が有名なリフシッツなど，宇宙空間全体が膨張・収縮を繰り返すと考えた研究者は少なくない．フリードマンの見いだした解は，スケール因子 a がゼロのとき特異点になるため周期解ではないが，これは，完全な一様等方性が成り立つと仮定したことによるものだという見方もあった．

ニュートン力学でも，球対称に分布した質量が整然と中心に向かって運動すると仮定すると，有限時間で中心に質量密度が無限大となる特異点が生じる．しかし，これは球対称性が完全だと仮定したことによる非現実的な解でしかない．多数の粒子が運動する場合，球対称からわずかにずれると，接近した 2 粒子は相互にケプラー運動をする．多数の粒子が相互作用しているうちに，いくつかの粒子は弾き飛ばされ，残った粒子が束縛されたシステムを形作るはずである．

ちょっと考えると，宇宙でも同じようなことが起きる可能性がありそうに思える．完全な一様等方性を仮定すると，スケール因子 a がゼロになる点が特異点になるが，質量分布が完全に一様ではなく，天体が空間に点在するような場合には，宇宙空間全体が収縮して接近してきた天体が互いにすれ違い，再び膨張に転じそうに見えるからである．

しかし，こうした期待は，ペンローズとホーキングの議論によって打ち砕かれた．特異点が生じるのは，一様等方空間などに限られるのではなく，重力によって空間が収縮するほとんどのケースに見られる普遍的な現象であることが確かめられたのである．一

般相対論は時間の反転に対する不変性があるので，過去と未来を入れ替えれば，重力に逆らって空間が膨張していくようなケースでも，宇宙の始まりが特異点になる．このように，多くのケースで特異点が現れることを主張するのが，**特異点定理**である．アインシュタイン方程式が厳密に成り立つ一般相対論の枠内では，この定理のせいで，周期的に膨張・収縮を繰り返す振動宇宙が存在する可能性は事実上否定される．

それでは，永遠に振動を繰り返すような宇宙は，決して存在できないのだろうか？「存在できる」と答えるには，特異点定理から逃れられるように一般相対論を改変しなければならない．本章では，その可能性を探っていきたい．

7-2 節　ブラックホールと事象の地平面

時空の特異点とは，どのような座標系を用いても計量テンソルが定義できなくなる領域（必ずしも点状だとは限らない）であり，時空に開いた穴や，時空が潰れたりちぎれたりする端として思い描くことができる．特異点が含まれる解としては，フリードマン模型以外にもブラックホール解などが知られている．ただし，これらの解は，空間の一様等方性や計量テンソルの球対称性など，きわめて特殊な条件を課した上でアインシュタイン方程式を厳密に解いたものであり，条件をゆるめても特異点が現れるかどうかは，長い間，議論の的だった．この議論に決着を付ける最初の一歩となったのが，1965 年にペンローズが証明した特異点定理で，天体が重力崩壊を起こしてブラックホールになると，その内部に必然的に特異点が現れることが示された．ブラックホールの特異点は，宇宙全体の特異点よりもイメージしやすいので，先にこちらを取り上げることにしよう．議論を進めるためには，まず，地平面について説明する必要がある．

質量が 1 点に集中しており，周囲が完全に球対称だとすると，重力場は次のシュヴァルツシルト解で与えられる（座標の選び方によってさまざまな表現があるが，この式が最も有名である）．

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{7.1}$$

ただし，R_S は**シュヴァルツシルト半径**であり，中心の質量を M，万有引力定数を G とすると，

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

で与えられる．

(7.1) 式の重力場は，$r = 0$ と $r = R_S$ で値が発散するが，このうち特異点と言えるものは $r = 0$ だけである．$r = R_S$ の球面は**シュヴァルツシルト面**と呼ばれ，すぐ後で述べるように，奇妙な性質を持つものの，時空自体は滑らかである．

$r = 0$ で重力場が発散することは，ニュートンの重力理論において，質点の作る重力ポテンシャルが質点からの距離がゼロとなる地点で発散するのと良く似ている．ただし，ニュートン理論では，ユークリッド空間の内部で重力ポテンシャルの値が無限大になるだけなのに対して，一般相対論の場合は，時空自体が滑らかではなく，質点が置かれているはずの地点が空間内部に存在しないという状況になる（数学的な言い方をすれば，時空を表す多様体がコンパクトでないということである）．

1916 年に発見された当初，シュヴァルツシルト解は，単なる数学的な特殊解にすぎず，この式で表される重力場が現実に存在するとは考えられていなかった．しかし，1939 年に，オッペンハイマーが，きわめて質量の大きい天体（現在の計算では，太陽の 8 倍以上の質量を持つ天体）が自分の重さに耐えきれなくなって収縮していくとき，有限な時間のうちに完全に潰れてしまい，シュヴァルツシルト解で表される状態になる可能性があることを指摘した．

オッペンハイマーの計算は，完全な球対称性を仮定し，さらに，重力に比べて圧力が充分に小さいとして圧力項をゼロと置く近似を採用したものだった．このため，計算通り完全に潰れて特異点ができるのか疑う研究者も少なくなかった．

この見方を否定したのが，ペンローズの特異点定理であり，一般相対論が正しければ，たとえ完全に球対称でなくても，重力崩壊の結果として特異点が現れることになる．

ペンローズの証明の要になるのが，シュヴァルツシルト面に相当する曲面の存在である．この面は，言うなれば一方通行しか許されていない“関所”のようなもので，光や物質を内側に通すことはあっても，外側に逃がすことはない．光も出てこないため，この面の内側がどうなっているかを外部から窺(うかが)い知ることができない．面の彼方は“地平線”の向こう側のように，どんな高性能の望遠鏡をもってしても見えないのである．このため，こうした一方通行の面は「**事象の地平面**（面状なので，地平“線”ではなく地平“面”とした）」と呼ばれる．地平面に囲まれ光を放出することもできない天体が，いわゆるブラックホールである（実際には，地平面の外側におけるガスの運動に伴って電磁波が生じるので，多くのブラックホールは放射に包まれている）．ペンローズの証明によれば，閉じた地平面が存在すれば，たとえ球対称でなくても，曲面の内側に必然的に特異点が現れることが示される．

特異点定理を数学的にきちんと証明することはかなり難しいので，以下では，直観的な議論をしてみたい．

「一方通行の面」が何を意味するかは，次のように考えるとわかりやすい．時間座標 t

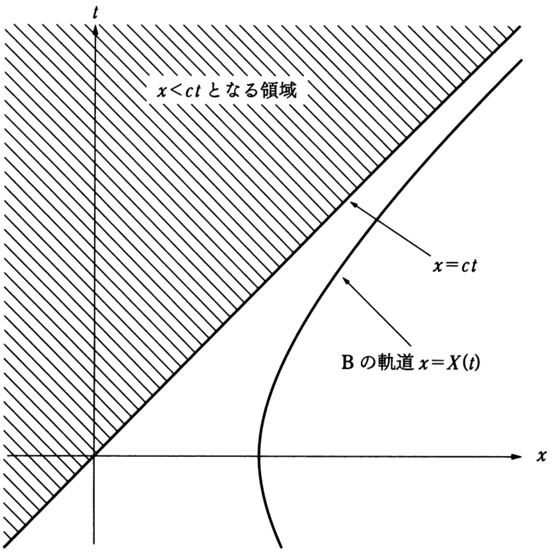


図 7-2　等加速度運動する観測者の軌道

と空間座標 x で表される 2 次元のミンコフスキ時空において，座標系 (t, x) に対して静止している観測者 A と，A から見て一定の加速度 a で運動している観測者 B がいるものとしよう．A から見た B の相対速度 v は，特殊相対論における加速度の公式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = a$$

を使えば，

$$v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}$$

と求められる（$t=0$ のとき $v=0$ になるものとする）．したがって，B の位置座標 X は，

$$X = \int^t v dt = \int^t \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} dt = \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}$$

となる（積分定数は式が簡単になるように選んだ）．t が充分に大きいとき，$X \approx ct$ となるので，B の軌道は，$t=0$，$x=0$ を通る光の軌道 $x=ct$ に漸近する（図 7-2 参照）．

ここで重要なのは，$x = ct$ が B から見て「情報の地平線」になることである．$x < ct$ となるような時空点から発せられた光線は，決して B の軌道と交わらない．B は加速しながら逃げているため，光でも追いつけないのである．光は自然界の最高速度なので，B にとって $x < ct$ となる領域は，そこから決して情報が伝わって来ない「地平線の彼方」になる．

ただし，情報の地平線と言っても，時空の滑らかさが失われる特異点ではない．A から見た時空はミンコフスキ時空なので，時空の穴や裂け目はどこにもない．$x > ct$ の側から地平線を越えて情報を送り込むことは可能である．また，この時空を運動する観測者は，A から見ると単にミンコフスキ時空内部を動いているだけなので，地平線を越える際に，何ら特異な事象に遭遇しない．地平線とは，決して時空の計量が定義できなくなる領域ではなく，あくまで観測者に情報が届かなくなる境界を意味している．

ここで，観測者 B の座標系を次のように定義する．時間軸としては，B の固有時（B が持つ時計の時刻）τ を使う．B の時計はローレンツ因子の分だけ遅れていくので，τ は次式で与えられる（$t = 0$ となる時刻を τ の原点とする）．

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c}{a} \sinh^{-1} \frac{at}{c}$$

B の位置座標 X を τ で表すと，

$$X = \frac{c^2}{a} \cosh \frac{a\tau}{c} \tag{7.2}$$

となる．ここで，B の軌道が座標軸 $\xi = 0$ となるような次の座標系 (τ, ξ) を考えよう．これは，**リンドラー座標系**と呼ばれる．

$$t = \frac{c}{a} e^{a\xi/c^2} \sinh \frac{a\tau}{c}$$
$$x = \frac{c^2}{a} e^{a\xi/c^2} \cosh \frac{a\tau}{c}$$

双曲線関数の性質から，

$$\sqrt{x^2 - c^2 t^2} = \frac{c^2}{a} e^{a\xi/c^2}$$

となるので，地平線の位置は $\xi = -\infty$ になる．また，A から見た時空がミンコフスキ時空であることより，長さ要素 ds は，

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = e^{2a\xi/c^2} \left(c^2 d\tau^2 - d\xi^2 \right) \tag{7.3}$$

となる．

さて，再び天体の周囲の重力に話を戻そう．(7.1) 式で与えられるシュヴァルツシルト解において，θ と ϕ の変化は考えず，シュヴァルツシルト面の近傍で

$$r = R_S \left(1 + e^{\xi/R_S}\right) \tag{7.4}$$

と置き，ξ が小さいものとして 2 次以上の項を無視すると，(7.1) 式は，

$$ds^2 = e^{\xi/R_S}\left(-c^2 dt^2 + d\xi^2\right)$$

となる．(7.3) 式と見比べれば，リンドラー座標系と同じ形をしていることがわかる．リンドラー座標系では $\xi = -\infty$ に地平線が現れるが，(7.4) 式に示されるように，天体の周囲で $\xi = -\infty$ はシュヴァルツシルト面になる．つまり，シュヴァルツシルト面とは，時空が滑らかでなくなる特異点ではなく，そこから先の情報が得られなくなる地平線（2 次元曲面なので地平面）なのである．

等加速度運動する観測者が見る地平面と天体の周囲に現れる地平面が質的に同じものであることは，第 1 章で述べた等価原理の帰結である．ミンコフスキ時空で慣性運動している観測者 A は無重力状態にあり，加速度運動している観測者 B は慣性力を感じている．一方，ブラックホールに向かって自由落下している観測者 A′ と，地平面の外側でホバリングしている観測者 B′ を考えると，観測者 A′ は無重力状態にあり，観測者 B′ は天体からの重力を感じている．ところが，等価原理によれば，重力と慣性力は，原理的に区別できないはずである．したがって，2 つの観測者 B と B′ が見る世界は，（天体の周囲では場所によって重力が変わることを別にすれば）同じでなければならない．こうして，ミンコフスキ時空内部で等加速度運動する観測者 B が見るとの同じ地平面を，ブラックホールのそばでじっとしている観測者 B′ も見ることになる．

天体を取り囲む事象の地平面が見られるのは，球対称の天体に限らない．重力崩壊によって質量がきわめて狭い領域に押し込められた天体ならば，どのような場合でも現れる．その数学的な証明は難しいが，次のように考えれば納得できるだろう．

前と同じように，ミンコフスキ時空で慣性運動する観測者 A と，一定の加速度 a で運動する観測者 B を取り上げる．B から見ると，空間全域にわたって一定の重力加速度 a の重力が加わっており，重力が加わる方向に事象の地平面が存在する．ここで，B から地平面までの距離を（リンドラー座標系の目盛りではなく）物質で作った物差しで測ることを考えよう．この距離は，B と A の相対速度がゼロになった瞬間に，観測者 A が測った $x = 0$ から B の位置までの距離と一致するはずなので，(7.2) 式より c^2/a となる．つまり，B から見ると，重力加速度 a の領域が c^2/a にわたって続いた先に地平面が現れる訳である．加速度 a として地球表面の重力加速度 9.8 m/s^2 を選ぶと，c^2/a の値はおよそ 1 光年（10 兆 km）になり，きわめて広大な範囲にわたって重力場が拡がっ

ていなければ，地平面は姿を現さない．

しかし，天体をどこまでも圧縮することができるならば，事情が異なってくる．充分に圧縮された天体の中心から距離 r の地点で静止している観測者 B′ を考えよう．B′ が感じる重力加速度 a は，r が小さいときには $O\left(1/r^2\right)$ になるので，B′ が天体表面に近づいていったとき，c^2/a の値は，ある地点で天体中心までの距離 r を下回ることになる．重力加速度 a の値は場所によって変化するため，c^2/a が地平面までの距離に等しい訳ではないが，目安として使えるものとすると，B′ のいる地点から圧縮された天体の表面までの間に地平面が現れると推測される．こうした状況は，どの方向から天体に近づく場合でも同様なので，天体を取り囲む地平面が存在するはずである．

数学的にきちんとした議論を行った場合でも，同じ結論を導くことができる．すなわち，充分に圧縮された天体ならば，球対称でなくても，天体を取り囲む地平面が現れる．

7-3節　ペンローズの特異点定理

ペンローズの特異点定理とは，天体を取り囲むような地平面 S が存在するとき，S の内部に必然的に特異点が現れることを主張するものである．そのきちんとした証明は数学的に高度になるのでここでは行わないが，証明の流れだけを示しておこう．

ゆがんだ時空において，ユークリッド幾何学の直線に相当するのが**測地線**である．測地線とは，2点間の距離（長さ要素 $|ds|$ を積分したもの）が最短になるような線のことで，（時間のない）球面では大円に沿った線になる．一般相対論で扱われる時空の場合，測地線は，重力の作用だけを受けながら周囲には何の影響も及ぼさずに運動する仮想的なテスト粒子の軌道と一致する．

ここで，天体を取り囲む地平面 S から無数のテスト粒子を自由落下させ，これらの粒子が描く測地線の束を考えることにする．ニュートンの重力理論の場合，テスト粒子が再び S に戻ってくることも可能だが，一般相対論では，ひとたび地平面を通り抜けた粒子は決して外に出ることができず，内側へと進み続ける．このため，地平面の内側に延びた測地線の密度（測地線に垂直な面に対する面密度）は増大し続ける．面密度が増大する割合はアインシュタイン方程式を使って求められるが，その結果から，測地線の面密度は急激に増大していき，有限な距離の間に必ず1点に集まってくることが示される．これが，特異点定理の証明の骨格となる．

言葉だけではわかりにくいと思うので，あまり厳密な形ではないが，少し式も書いておこう．測地線の束に沿った単位ベクトル場 u^μ を考える（電磁気学で，電気力線の束を電場ベクトルで表すのと似ている）．u^μ は，S のさまざまな地点から落下するテスト

粒子の 4 元速度に等しく，時間成分（正とする）の方が空間成分よりも大きい“時間的な”ベクトルである．

ここで，ベクトル場 u^μ の収束 Γ を次式で定義する．

$$\Gamma = -\nabla_\mu u^\mu$$

∇_μ は第 4 章（93 ページ）で少し触れた共変微分を表す．ここで言う「収束」とは，ベクトル解析で使われる「発散」の符号を変えたもので，測地線が時間とともに集まってくる領域では Γ は正になる．測地線に沿った Γ の変化率を，ドットを付けて表すことにしよう．

$$\dot{\Gamma} \equiv u^\nu \nabla_\nu \Gamma$$

導出法は省略するが，物理的な法則によらない測地線の幾何学的な性質だけから，次の関係式が導ける．

$$\dot{\Gamma} \geqq \frac{1}{3}\Gamma^2 - R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \tag{7.5}$$

ただし，$R_{\mu\nu}$ は第 1 章で出てきたリッチテンソルである．

(7.5) 式の導出には，共変微分の定義と，測地線の幾何学的な性質を利用する．求め方の道筋だけ記しておこう．まず，(7.5) 式の左辺を次のように書き換える．

$$u^\nu \nabla_\nu \Gamma = -u^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu u^\mu = u^\nu \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) u^\mu - \nabla_\mu \left(u^\nu \nabla_\nu u^\mu\right) + \left(\nabla_\mu u^\nu\right)\left(\nabla_\nu u^\mu\right)$$

この式の右辺第 1 項は，共変微分の定義から，リッチテンソルを使って表すことができる．

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) u^\mu = R^\mu_{\beta,\mu\nu} u^\beta = -R_{\beta\nu} u^\beta$$

第 2，3 項には，測地線の幾何学的な性質から導ける次の式が適用できる．

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$$
$$\left(\nabla_\mu u^\nu\right)\left(\nabla_\nu u^\mu\right) \geqq \frac{1}{3}\left(\nabla_\mu u^\mu\right)^2$$

以上をまとめると，(7.5) 式が得られる．

(7.5) 式に，アインシュタイン方程式を適用しよう（物理の法則を利用するのは，ここだけである）．宇宙項のないアインシュタイン方程式（第 1 章 (1.19) 式）の両辺に $g^{\mu\nu}$

を掛けて μ と ν についての和を取ると，各辺はそれぞれ次のようになる（宇宙項があるケースは 7-4 節で論じる）．

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)=-R$$
$$-\kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\equiv-\kappa T$$

ここから得られる $R=\kappa T$ を元のアインシュタイン方程式に代入すれば，リッチテンソルの式が求められる．

$$R_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{7.6}$$

(7.6) 式を (7.5) 式に代入すると，Γ の変化率が，エネルギー運動量テンソルを含む不等式で表される．

ところが，エネルギー運動量テンソルは，一般に次の不等式（**エネルギー条件**）を満たすと考えられている．

$$\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)u^{\mu}u^{\nu}\geqq 0 \tag{7.7}$$

ただし，u^{μ} は任意の時間的な（時間成分の方が空間成分より大きい）単位ベクトルである．特異点定理の証明に現れる u^{μ} は，重力の作用だけを受けて運動するテスト粒子の 4 元速度に等しいが，このテスト粒子に固定された座標系では，

$$u^0=1, \qquad u^1=u^2=u^3=0$$

となる．したがって，この座標系でのエネルギー条件 (7.7) は，$\mu=\nu=0$ という成分だけを考えれば良い．T_{00} はエネルギー密度なので常に正になるが，$-Tg_{00}/2$ がどうなるかは一般にはわからないため，エネルギー条件はあくまで仮定でしかない．しかし，具体的に計算がなされたほとんどのケースで成立する「一般性のきわめて高い仮定」である（エネルギー条件が成立しないケースは 7-4 節で紹介する）．

エネルギー条件 (7.7) が満たされているならば，(7.5) 式と (7.6) 式から次の不等式が導かれる．

$$\dot{\Gamma}\geqq\frac{1}{3}\Gamma^2 \tag{7.8}$$

この不等式は，測地線上で Γ が正となる地点があれば，Γ が急激に増えていくことを意味しており，特異点が現れることを示唆する．

測地線に沿って落下する観測者の固有時によって時間 τ を定義すると，(7.8) 式のドットは，$c\tau$ による微分になる．そこで，(7.8) 式を少し書き換えた上で τ で積分してみ

よう．

$$\int_0^T \frac{c\dot{\Gamma}}{\Gamma^2}d\tau = \frac{1}{\Gamma(0)} - \frac{1}{\Gamma(T)} \geqq \frac{cT}{3} \tag{7.9}$$

閉じた地平面の内側や宇宙空間全体が重力で収縮している場合は，測地線は集まってくるので，$\Gamma(0) > 0$ となる地点がある．(7.9) 式右辺の T は測地線に沿って増していくので

$$T \leqq \frac{3}{c\Gamma(0)} \tag{7.10}$$

となる有限な時間 T 以内に Γ は無限大となり，測地線の束が 1 点に集まるはずである．ところが，閉じた地平面から延びた測地線が別の測地線と交わると，幾何学的に矛盾が生じることが示せる（この証明も省略するが，交点が存在すると，その周辺を丸めた新たな測地線が作れることが矛盾を引き起こすというもので，物理の法則は使わない）．したがって，Γ が無限大になるのは滑らかな時空内部ではなく，特異点でなければならない．以上が，特異点定理を証明する道筋である．

> 特異点定理のきちんとした証明は，S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press) に記されている（この本で採用されているリッチテンソルの定義は，本書と符号が逆である）．ただし，大学院レベルの数学を駆使した内容で，当然のことながら，かなり難しい．

特異点定理の証明で重要なのは，重力以外の物理法則の詳細によらないという点である．アインシュタイン方程式が厳密に成り立っている場合，証明に必要な物理的な条件は，エネルギー条件 (7.7) だけである．この条件が満たされてさえいれば，重力以外の相互作用がいかなるものであろうとも，特異点は必然的に現れる．

きわめて巨大な質量を持つ天体が核融合を起こす燃料（水素やヘリウム）を使い果たしたとき，放射圧（光が物質に及ぼす圧力）や縮退圧（中性子などパウリの排他律に従う粒子がもたらす圧力）では自分の重さを支えられなくなって，重力崩壊を始める．こうした恒星の末路について調べていた初期の研究者たち（エディントン，ランダウ，チャンドラセカールら）は，収縮していった後，どこかで未知の相互作用によって収縮が止まり，高密度の小さな天体になると推測していた．実際，きわめて高密度になったときの相互作用については，現在でもよくわかっていない．中性子星を構成する中性子物質に関してはある程度まで判明しているが，さらに圧縮されて中性子もバラバラになったクォーク物質になると，どのような物性を示すのか不明な点が多い．もしかした

ら，クォークにも内部構造があり，圧力が高まるとさらに細かく砕けていくかもしれない．しかし，ひとたび事象の地平面が形成されてしまうと，たとえどのような相互作用が働こうとも，もはや重力崩壊をくい止めることはできない．アインシュタイン方程式が成り立ち，エネルギー条件が満たされている限りは，特異点が不可避的に現れる．これが，特異点定理の帰結である．

(7.10) 式に示されるように，閉じた地平面を通過した物体は，有限の時間で特異点に達して，この世界から消滅する．その結果，以前に世界がどのような状態にあったかという情報も失われることになるが，こうした情報の喪失が理論物理学にとって本質的な困難となるのか，現在でも議論が続いている．

7-4節　宇宙論における特異点定理

ペンローズの証明は，ホーキングによって一般化され，宇宙空間全体にも適用可能であることが示された．宇宙空間も，重力の作用によって収縮を始めると，測地線が急激に集まってくるため，不可避的に特異点が現れる．アインシュタイン方程式は時間を反転させても成り立ち，過去に向かっても同じような議論が適用できるので，膨張している宇宙を過去に遡っていっても，必ず特異点に到達する．

宇宙空間に適用する場合は，閉じた地平面の代わりに，宇宙全体の時空構造に一定の条件（例えば，時間が経過した後に同じ時間に戻るような円環をなす時間軸が存在しないなど）を付け加える必要があるが，それ以外は，重力崩壊の場合と良く似たステップを経て証明することができる．

① 宇宙全体を時間ごとにスライスする．スライスされた空間の1つから出発する測地線の束を表すベクトル場を考え，その収束 Γ を定義すると，測地線に沿った Γ の変化率は，(7.5) 式と同じ不等式を満たす．

② アインシュタイン方程式とエネルギー条件を用いると，①の不等式は (7.8) 式の形に書き換えられる．この式より，空間が収縮しているときには未来方向に，膨張しているときには過去方向に向かって $|\Gamma|$ が急激に増大し，（固有時で測って）有限時間のうちに $|\Gamma|$ が無限大になり測地線の束が1点に集まることが示される．

③ 滑らかな時空内部で①の測地線が交わると幾何学的に矛盾が生じるので，測地線の集まる点は特異点でなければならない．

以上が，特異点定理の証明の大ざっぱな流れである．特異点定理によって，重力の作用で全体として収縮する宇宙空間は，有限時間のうちに特異点を作り出して完全に潰れ

てしまうことが示される．したがって，天体がすれ違って再膨張に転じるということはあり得ない．

ブラックホールの特異点の場合と同じく，宇宙論的な特異点が現れるための物理的な条件は，アインシュタイン方程式が成り立ち，エネルギー条件 (7.7) が満たされることである．議論を簡単にするために，一様等方宇宙を考えることにしよう．このとき，フリードマン方程式を解くことによって特異点の有無を確かめることができるので，どのようなときに特異点定理が成り立たなくなるかが理解しやすくなる．

一様等方宇宙の場合，共動座標で静止しているテスト粒子の 4 元速度 u^μ を使うことにすれば，(7.7) 式で $\mu=\nu=0$ と置いてかまわない．物質の状態が完全流体で表されるとすると，ロバートソン－ウォーカー計量を用いたときのエネルギー運動量テンソルは，物質密度 ρ と圧力 p で表される（第 3 章 (3.6) 式参照）．

$$T_{00}=\rho c^2, \qquad T_\mu^\nu=\begin{pmatrix}-\rho c^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix}$$

このとき，エネルギー条件は，

$$T_{00}-\frac{1}{2}Tg_{00}=\rho c^2+\frac{1}{2}\left(-\rho c^2+3p\right)=\frac{1}{2}\left(\rho c^2+3p\right)\geqq 0$$

という不等式になる．通常の物質の場合，ρ も p も正なので，エネルギー条件は満たされている．

暗黒エネルギーが存在すると，事態は少々変わってくる．第 3 章で述べたように，暗黒エネルギーは負の圧力をもたらすため，エネルギー条件が満たされないこともあり得る．暗黒エネルギーの効果を調べるために，宇宙項のあるアインシュタイン方程式を考えることにしよう．これまでの議論に宇宙項を含めるには，エネルギー運動量テンソルを，

$$T_{\mu\nu}\to T_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}^{(\lambda)}, \qquad T_{\mu\nu}^{(\lambda)}\equiv-\frac{\lambda g_{\mu\nu}}{\kappa}$$

と書き直せば良い．(7.7) 式に対する宇宙項の寄与だけを書き出すと，

$$T_{00}^{(\lambda)}-\frac{1}{2}T^{(\lambda)}g_{00}=\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{1}{2}\left(-\frac{4\lambda}{\kappa}\right)=-\frac{\lambda}{\kappa}$$

となり，λ が正ならばエネルギー条件は満たされない．物質が存在せずに宇宙項だけがあるときの振舞いは，第 6 章 (6.1) 式に示した通りだが，閉じた空間では，空間全体が収縮しているにもかかわらず，特異点が現れないまま膨張に転じる．ただし，このケー

スでは，重力の作用で空間が収縮しているのではない．無限の過去にあった“最初の一撃”が宇宙項による斥力の効果を凌駕したため収縮を続けてきたのであり，再膨張は宇宙項の効果が現れた結果にすぎない．暗黒エネルギーによって特異点定理から逃れられると言っても，無限大の空間が収縮して最小値に達した後に再び無限大に膨張していくというような，ごく限られた振舞いしか実現できないのである．

7-5節 特異点を回避するには

特異点定理は，一般相対論の応用に大きな制限を設ける．宇宙論の場合，重力の作用で宇宙空間が収縮し始めると，エネルギー条件 (7.7) が満たされている限り，どのような相互作用を仮定しても収縮をくい止めることはできない．集まってきた天体がすれ違ったり，極限にまで圧縮された物質が爆発したりして再膨張に転じることはないのである．

特異点は，一般相対論において，喉に刺さった棘のようなものである．一般相対論は微分幾何学の手法を駆使して構成されているが，特異点があると，その手法が通用しない領域が理論の中に必然的に現れてしまう．こうした領域の存在は，往々にして，その理論が完全ではなく，より根源的な理論が必要になることを示唆する．例えば，流体力学は，微分方程式を使って水のような流体の滑らかな運動を見事に説明できるが，波頭が砕けるような現象になると，微分方程式だけでは記述し切れない．こうした現象を扱うためには，水が連続的な流体ではなく分子の集合体だという見方が必要になる（ただし，全分子の運動を量子論的に記述するのは現実問題として困難なので，半経験的な手法で数値計算せざるを得ない）．一般相対論も，特異点が現れないように理論を改変する必要があるのかもしれない．

こうした改変の方法として，いくつかの提案がある．きわめて短い距離では重力を含むあらゆる相互作用が急激に弱くなるという方法も考えられる．しかし，ここでは，もう少し原理的な方法を探してみよう．

特異点定理の証明では，測地線が交わるかどうかが重要な役割を果たすが，こうした議論が厳密に行えるのは，時空は滑らかな連続体（可微分多様体）だと仮定しているからである．逆に言えば，時空が連続的でない場合は，特異点定理の証明ができない．連続した拡がりのように見える時空が，実は，それ以下の拡がりを考えることが原理的にできない最小の構成要素から組み立てられているとすると，特異点を回避できる可能性がある．

時空に最小の構成要素が存在するというアイデアは，重力場を量子化する上でも重要

である．第6章6-3節の議論では，一様等方空間を仮定して，スケール因子 a を量子論的に扱った．これは，宇宙全体の振舞いを考える上でやむを得ない方法ではあるが，実際の重力場には局所的な変化が必ず存在する．経路積分を用いて理論を量子化するには，次のように，アインシュタイン方程式を満たさないものも含めて，重力場の可能な状態を全て加えあわせなければならない（重力場は座標の取り方による不定性があることなどにより，積分の式を正確に定義するのが難しいので，ここでは，あまり厳密ではない和の形で書いておいた）．

$$\sum_{g_{\mu\nu}} \exp\left(iS\left[g_{\mu\nu}\right]/\hbar\right) \tag{7.11}$$

ところが，重力の作用 S は，重力場の微分をいくつも含んでおり，重力場が狭い範囲で変動するとその寄与が大きくなって，(7.11) 式に現れる指数関数が激しく振動してしまい，和を取ることが困難になる．このため，量子重力理論を構築するには，狭い範囲で重力場が大きく変動しないような方法を考案する必要がある．時空に最小の構成要素があると，それ以下の範囲では原理的に重力場の変動がなくなるので，重力を量子化することが可能になると期待されている．

このアイデアに基づいて作れらた理論としては，**ループ量子重力理論**と**力学的単体分割理論**が知られている．そこで，この2つの理論について，重力に抗して収縮してきた宇宙が特異点で終わることなく，再び膨張に転じるような振動宇宙になる可能性があるかどうかを，見ていくことにしよう．

7-6節　ループ量子重力理論

時空が連続的でなくなる理論として特に有名なのが，ループ量子重力理論である．この理論の特徴は，連続的な時空を出発点にしているにもかかわらず，量子化を通じて時空に最小構成要素が現れるという点である．もっとも，ループ量子重力理論は，数学的にきわめて高度でわかりにくいため，本書では，具体的な式は使わずに結果のあらましだけを述べるにとどめる．

理論の量子化を行うと，実現される状態で物理変数の取る値が制限され，多くの場合，その期待値が整数 n（量子数）によって指定される．第2章で紹介した調和振動子のケースを例に取ろう．このとき，エネルギーが第2章 (2.14) 式のように離散的になるが，調和振動子では，ポテンシャルエネルギー（第2章 (2.12) 式）と運動エネルギーの平均値が一致することから，振動子の座標 q の2乗平均は次のように表せる（この結果

は，第2章で紹介した生成・消滅演算子を使えば，簡単に確かめられる）.

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{\mu\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

重力場の量子化を行う場合，調和振動子の q に相当する変数として何を選ぶかが，大きな問題となる．重力場（計量テンソル）$g_{\mu\nu}$ 自体は，座標変換に対して変化する量なので，量子化するときの扱いが難しい．ループ量子重力理論では，量子化に利用する変数として，空間内部での積分を含む次のループ変数 T_α が利用される．

$$T_\alpha = \mathrm{Trace}\left\{P\exp\left(\oint_\alpha A\tau dx\right)\right\}$$

α は積分を行うループを表す．T_α を基本的な変数として量子化を行うと，調和振動子の場合と同じように，実現される状態が量子数 n で指定される．複数のループ変数を考える場合は，実現される物理的な状態はいくつもの量子数の組み合わせとなるが，この組み合わせは，スピンネットワークと呼ばれるダイアグラムによって表される．

ここでは記号の説明などは省略したが，ループ量子重力理論に興味のある人は，ロヴェッリの解説（C. Rovelli, “Loop Quantum Gravity,” http://www.livingreviews.org/lrr-2008-5）などを参照していただきたい．ごく簡単な解説ならば，拙著『明解 量子重力理論入門』（講談社）にも記しておいた．

ループ量子重力理論の特徴は，交差のない連続的な変形によって重ねることができるループは同一だと見なす点である．このため，まず計量を持つ連続的な時空の拡がりが存在し，その中にいくつもループが存在するということにはならない．拡がった時空の中にループがあるのではなく，ループによって時空の拡がりが定義されていると考えることになる．一般相対論では，ゆがんだ時空という幾何学的な実体があり，座標系は，この幾何学的実体を表現するために便宜的に導入したものにすぎないので，座標変換しても物理法則が変わらないことが要請されていたが，ループ量子重力理論では，スピンネットワークで指定されたループ変数の状態が，この幾何学的実体に相当する．この結果，面積や体積のような幾何学的な量も，スピンネットワークに含まれる量子数を使って表される．こうして，もともと連続的な時空から出発したにもかかわらず，量子化によって，面積や体積が離散的な値に制限されることになる．

閉じた（$k = +1$ の）フリードマン模型の場合，通常の一般相対論では，膨張から収縮に転じた宇宙空間は，有限な時間の間にスケール因子 a がゼロとなり，それとともに曲率テンソルなどの値が無限大になってしまう．言うなれば，宇宙全体が特異点の中に

消滅するのである．しかし，体積が整数で指定される離散的な値に限られるならば，その変化を表す方程式は微分方程式ではなく差分方程式になり，体積がスムーズにゼロに近づくことはできない．

ループ量子重力理論を宇宙全体に適用する試みは，すでにいくつか行われている．その中で最も興味深い結果は，閉じた一様等方空間の場合でも特異点が現れないことである．物質としてスカラー場を含む一様等方空間について，ループ量子重力理論に基づく方程式（第 6 章 6-4 節で紹介したホイーラー－ドウィット方程式に相当するもの）を立てて全体的な振舞いを調べたところ，曲率が小さいときには量子化されていないフリードマン模型と一致する変化を示すが，曲率が大きくなるとずれが現れた．モデル計算によると，宇宙空間が収縮して曲率が増大する場合，ある段階で最小の体積になった後，バウンドして再膨張に転じることが示された．体積が最小になるのは，4 次元のスカラー曲率 R の値が，$1/l_P^2$ 程度になったときである（バウンドするときの空間の大きさそのものは，l_P よりもずっと大きい）．ただし，l_P は，次式で定義される**プランク長**で，一般的な量子重力理論で量子効果が現れる特徴的な長さである．

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-35}\ \mathrm{m} \tag{7.12}$$

フリードマン模型のように空間が完全に潰れてしまわない理由は，時空の状態が制限された結果，曲率が大きくなったときに実質的な斥力が作用するためである．再膨張した空間は，最大になった後に再び収縮を始め，最小になってバウンドする．式の上では，この過程が永遠に繰り返される周期解となる．

この結果は，一度は見捨てられた振動宇宙論を復活させるものかもしれない．だが，ループ量子重力理論自体が重力を量子化する方法として正当かどうか議論が続いている段階なので，結論を出すまでには，もう少し様子を見る必要がある．

7-7 節　力学的単体分割理論

連続的でない時空を扱う理論としては，ループ量子重力理論の他にも力学的単体分割理論がある．ループ量子重力理論では，量子化の結果として面積や体積などが離散化されるのに対して，こちらは，初めから時空の基本的な構成要素となる単体を用意し，これを組み合わせて拡がった時空を作っていくという理論である．何を単体とするかによっていくつかの流儀があるが，特に研究が進んでいるのは，単体として正 3 角形や正 4 面体のような単純な図形を用いる方法である．とは言っても，この理論の研究者たち

が，現実の時空がこうした単純な図形の組み合わせだと考えている訳ではない．単純なモデルに基づいて単体分割が時空にどのような性質をもたらすかを調べながら，少しずつ現実的な理論へと発展させていこうという試みであり，最終的には，「時空の全体的な振舞いは単体の選び方によらない」という結果が得られると期待されている．

単体分割の研究では，コンピュータによるシミュレーションが大きな役割を果たす．解析的に有意味な結果が得られるのは，2 次元だけであって，3 次元以上では数値計算に頼らざるを得ない．ところが，(7.11) 式のままでは，作用 S の値が増減すると指数関数の部分が激しく振動して収束性が悪くなるため，数値計算によって信用できる答えを得ることができない．そこで，虚数時間を用いる計算テクニックが必要になる．

経路積分の式で形式的に時間 t を虚数時間 $\tau = it$ に置き換えてみよう（式を簡単にするために，粒子の位置 $q(t)$ を使ったラグランジアンの式を書くことにするが，物質や重力の場の理論に拡張することは，それほど難しくはない）．

$$
\begin{aligned}
iS = i\int_{-T}^{+T} dtL\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}\right) &= \int_{-iT}^{+iT} d\tau L\left(q(-i\tau), i\frac{dq(-i\tau)}{d\tau}\right) \\
&\to \int_{-T}^{+T} d\tau L\left(q'(\tau), i\frac{dq'(\tau)}{d\tau}\right) \equiv -S_E \qquad (q'(\tau) \equiv q(-i\tau))
\end{aligned}
$$

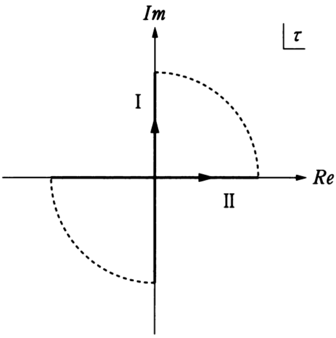


図 7-3 積分路の変更

この式で，1 行目は単なる変数変換だが，矢印で表した書き換えは，τ を複素数に拡張したときの積分路を，図 7-3 の I から II へと変更したことに相当する．$q(t)$ は経路積分における積分変数であり，関数形の選び方には任意性があるので，性質の良い解析関数を使って積分路 II においても値が評価できるようにすることは可能だが，被積分関数が複素平面上でどのような振舞いをするか一般にはわからないので，積分路の変更

によって結果が変わらないという保証はない．したがって，虚数時間に置き換えることは，単なる変数変換ではなく，正当性が必ずしもはっきりしない便宜的な方法である．ただし，虚数時間を用いることが理論的に正当化できる場合もあり，研究してみるだけの価値はある．

虚数時間を用いると，時間と空間の区別が全くなくなる．例えば，時間 1 次元・空間 3 次元のミンコフスキ時空で時間 t を虚数時間 τ に置き換えると，4 次元のユークリッド空間になる．一般相対論は，時間 t を $-t$ に置き換えても不変なので，虚数時間 τ を用いた場合には，τ を複素共役の τ^* にしても理論は変化しない．このため，虚数時間を使う場合でも，結果に虚数が現れることはない．

虚数時間を用いたとき，経路積分を表す (7.11) 式は，次の形に置き換えられる．

$$\sum_{g_{\mu\nu}} \exp\left(-S_E\left[g_{\mu\nu}\right]/\hbar\right) \qquad \left(g_{\mu\nu}\text{は虚数時間を用いた時空での計量}\right) \tag{7.13}$$

この式は，統計力学における分配関数と同じ形をしており，統計力学の知見を利用することができる．実数時間の経路積分では，作用 S が最小になる古典解の寄与が最も大きく，量子揺らぎの寄与は，(7.11) 式の指数関数が振動するため，互いに打ち消し合って小さくなる．一方，虚数時間を用いた場合，S_E は統計力学におけるエネルギーに相当する量で，S_E が最小になる状態が基底状態となる．量子揺らぎは熱的な揺らぎに置き換えられ，その寄与は，S_E が大きくなるにつれて指数関数的に小さくなる．

単体分割では，虚数時間を用いた世界で，時空を単体の組み合わせで表すことになる．

§7-7-1　2 次元力学的単体分割

まず，単体分割とはどのようなものかを理解してもらうために，2 次元の単体分割から話を始めよう．時間を虚数で表すと，世界は 2 次元の曲面で表される．この曲面上で，幾何学的な計量テンソルを定義することができる．

CG（コンピュータ・グラフィックス）で曲面を表すのにポリゴンと呼ばれる小さな多角形が用いられることがあるが，それと同じように，2 次元世界を表す曲面も，次ページの図 7-4 のように，ポリゴンで分割することが可能である．このポリゴンが，単体に相当する．単体の選び方にはいくつかの流儀があるが，よく使われるのが，辺の値が全て等しい正 3 角形を用いる方法である．CG では，ポリゴンはあくまで曲面を表示するための手段として用いられるだけだが，力学的単体分割理論では，実際の時空の構成要素と見なされる（CG などとは異なる物理的なものだという意味を込めて，「単体分割」に「力学的」という言葉を付け加える）．

正 3 角形の単体の組み合わせで曲面を近似的に構成した場合，1 点に集まる辺の数 E に応じて，局所的な曲率が決定される．正三角形の頂角は $60°$ なので，$E = 6$ のときに

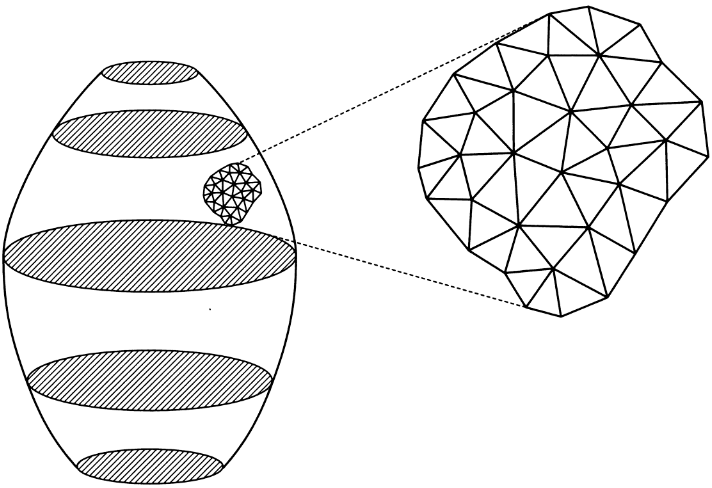


図 7-4　2次元での単体分割

曲率はゼロになる．E が 5 以下の場合には，正三角形を張り合わせた部分図形が出っ張るので，正の曲率となる．一方，E が 7 以上のときには，図 7-5 のように出っ張ったエッジと引っ込んだエッジが交差する鞍(くら)型になるので，曲率は負である．

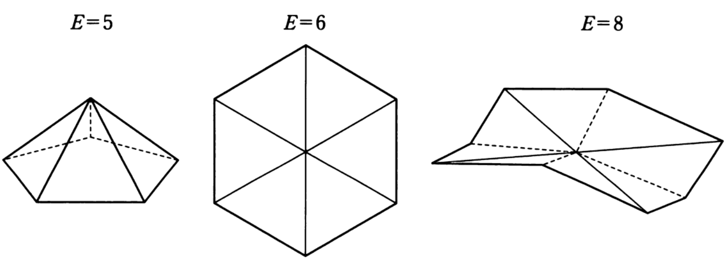


図 7-5　1点に集まる辺の数と曲率

ある点に集まる辺の数 E によって，符号を含む曲率の値を決定することができるので，多数の単体が2次元の面を形作っているとき，各地点での曲率の値を使って，単体で構成された面に関する作用 S_E を求めることができる．

2 次元の場合，作用 S_E は解析的に求めることができ，曲面の面積（= 単体の総数 N）とオイラー標数 χ を使って表すことができる．ただし，オイラー標数 χ とは，面のトポロジー的な性質だけによって決まる数で，曲面がドーナッツ（あるいはカップの取っ手）のように穴を持つ場合，穴の数を n とすると，$\chi = 2(1 - n)$ となる．分配関数は，万有引力定数を G，宇宙定数を λ とすると，次式で与えられる．

$$\sum_{\text{異なる単体分割}} \exp\left(\frac{\chi}{G} - \lambda N\right)$$

2 次元の力学的単体分割理論は，解析的に計算を行うことが可能である．また，分岐や融合を許すと，かなり多様な世界を生み出すことができる．

§7-7-2　2 次元因果力学的単体分割

ここまで述べた単体分割では，時間と空間は区別されていない．しかし，現実の宇宙では時間と空間の役割は異なっているので，このままでは現実とかなり異なった結果になると予想される．そこで，虚数時間を用いながらも，時間と空間の差異をある程度まで反映させるような工夫を凝らす必要がある．このような観点から考案されたのが，因果力学的単体分割と呼ばれる方法である．これは，単体となる正 3 角形に時間の向きを与え，単体を張り合わせた時空全体でも時間の向きが自然に定義できるようにした理論である．本来の時間は，相互作用の形によって空間から区別されるが，このような時間では経路積分の計算ができないので，その代わりとして，単体自体が時間を持つと仮定した訳である．

具体的には，単体である正 3 角形に，空間的な辺と時間的な辺があると仮定する．時空が連続的な場合，2 点間の時間的な間隔を t，空間的な間隔を r とすると，$ct > r$ が時間的，$ct < r$ が空間的な間隔に当たるが，これと同じような差異を単体の辺にも与えるのである．さらに，単体は，時空が物理法則に基づいて因果的に変化する際の基礎過程であると見なす．このように考えると，単体は，1 辺が空間的で 2 辺が時間的でなければならない．なぜなら，3 辺ともに時間的な単体は，時間が循環することを表すので許されない．1 辺が時間的で 2 辺が空間的だとすると，2 辺の空間的な変化を辿（たど）るだけで時間的な変化を導き出せることになるので，物理法則に基づく因果的な変化という考えに合わない．3 辺ともに空間的な単体は，因果的な変化を表さない．結局，許される単体は，2 辺が時間的，1 辺が空間的なものに限られる．

単体内部における時間の流れを考えると，次ページの図 7-6 の 2 つの可能性がある（実線が空間的な辺，点線が時間的な辺を表す）．因果力学的単体分割とは，この 2 種類の単体を，力学的な時間発展が実現されるように張り合わせていくことである．力学的

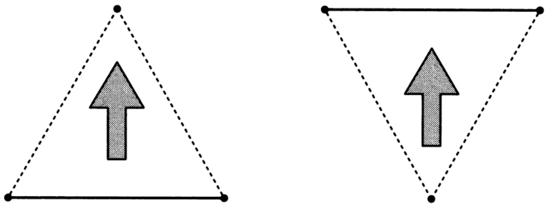


図 7-6 向きが与えられた単体

な時間発展が実現される張り合わせ方は，図 7-7 の 5 通りになる．例えば，図 7-8 の張り合わせ方は，時間の流れがそこで止まってしまい，力学的な時間発展にならないので禁止する．

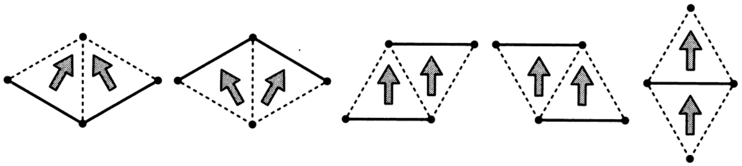


図 7-7 許される張り合わせ方

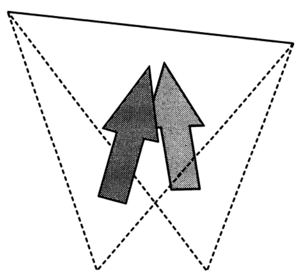


図 7-8 禁止される張り合わせ方

この制限の下で単体を張り合わせることで 2 次元の時空を作っていき，(7.13) 式における作用 S_E を計算すれば，それぞれの張り合わせ方に対する重みを決定することがで

きる．コンピュータによるシミュレーションを行う際には，さまざまな張り合わせ方をランダムに作っては作用 S_E を計算するという作業が繰り返される．こうして，量子揺らぎが存在するときに実現される時空を見いだすことができる．

§7-7-3　4 次元因果力学的単体分割

4 次元の場合，単体は，数学で 5 胞体と呼ばれる図形となる．4 次元の 5 胞体とは，2 次元の 3 角形，3 次元の 4 面体を 4 次元に拡張したもので，3 角形が 1 次元の線 3 つ，4 面体が 2 次元の面 4 つから構成されているのと同じように，3 次元の多面体（胞）5 つから構成される．4 次元の因果力学的単体分割理論では，2 つのタイプの 5 胞体が単体として使われる．それぞれの 5 胞体で時間的・空間的なエッジを決めた上で，物理法則に基づく因果的な変化が生じるように張り合わせ方を制限し，さまざまな構造を持つ時空を作る——というのが，4 次元における因果力学的単体分割理論の基本的な手法である．

これまでのところ，因果力学的単体分割で最も興味深い結果は，4 次元でのコンピュータ・シミュレーションによって得られた次元数に関するものである．4 次元の単体（5 胞体）を張り合わせたのだから，当然，できた時空も 4 次元になると思うかもしれないが，そうではない．単体は 4 次元であっても，時空がくしゃくしゃになってしまって，4 次元的な拡がりとは異なる時空しか生まれないこともあり得るからである．実際，因果的でない単なる力学的単体分割のシミュレーションでは，揺らぎの効果が強く現れて，時空は滑らかな拡がりを持たなくなった．

ここで，次元数とは何かを見直す必要がある．滑らかに拡がっていない空間の場合，座標軸の数は必ずしも次元数として適切ではなく，幾何学的な考察に基づいて次元数を定義しなければならない．例えば，ハウスドルフ次元とは，体積が長さのスケールの何乗に比例するかによって次元数を定義するもので，しばしば整数ではない次元数が現れる．因果的でない単体分割のシミュレーションを行った場合，時空がくしゃくしゃに潰れたボール状になり，ある立体図形の長さのスケールを増やすと体積が急激に大きくなるという結果になった．これは，ハウスドルフ次元の次元数が大きいことを意味する．4 次元の単体を張り合わせて作ったにもかかわらず，できた時空は 4 次元ではなくなるのである．

因果的でない力学的単体分割で 4 次元とは異なる時空ができたのに対して，因果的という条件を課して単体の種類と張り合わせ方を制限したところ，次元数がほぼ 4 になるという結果が得られた．この振舞いが現実の時空にも当てはまるならば，時空が拡がりを持つには，因果的な過程が重要な役割を果たしていることになる．

こうして得られた 4 次元の拡がりを持つ時空を 1 つの宇宙と見なして，3 次元空間の

状態が時間（単体に与えた時間の向きを使って定義されるもの）とともにどのように変化するかを調べたところ，一様等方性を保ちながら膨張・収縮することがわかった．膨張・収縮の過程は，理論に含まれる定数を変えることで大幅に変化する．統計力学における相転移（氷が溶けて水になるように，システムの状態が大幅に変化する現象）と同じようなことが起きた訳である．ある相では，膨張・収縮が何度も繰り返される振動宇宙になった．ただし，これは，シミュレーションの精度が粗い（時空の大きさに比べて，5胞体の個数が充分に多くない）ことによって生じた振舞いで，現実的ではないのかもしれない．異なる相では，フリードマン模型と同じように，1回だけ膨張・収縮を行い，この過程の前後で3次元空間は最小の拡がりしか持たない．

こうしたシミュレーションの結果をどこまで真剣に受け止めるべきか，研究者によって見方は分かれているが，宇宙全体の振舞いに量子論的な効果がかかわっている可能性が充分にあることは確かだろう．

第8章

永遠に生み出される宇宙

8-1節　定常的な宇宙

「宇宙は永遠にその姿を変えない」という見方は，1つの信念として古代から語られてきた．宇宙の中でさまざまなエピソードが繰り広げられるものの，その全体像は変化せず定常的だという宇宙観である．だが，銀河が互いに遠ざかっていることを示す 1929年のハッブルの発見によって，この考えは大きく修正される．

正確に言うと，ハッブルの発見は，銀河からのスペクトルに距離に比例する赤方偏移が見られるというだけで，必ずしも銀河が運動していることを意味しない．ハッブル自身，銀河が実際に運動しているのではなく，別の原因で遠方からの光の波長が引き伸ばされると考えていたことが，論文に記されている．赤方偏移のメカニズムとしては，遠方では一般相対論的な効果で時間がゆっくりと経過するという説と，伝わってくる過程で光子がエネルギーを失い，アインシュタインの関係式 $E = \hbar\omega$（ω は角振動数）に従って振動数が減少するという説が紹介されていた．

しかし，現在では，遠方の銀河の赤方偏移は，実際に銀河が遠ざかっている結果であることが確実になっている（ここで言う「実際に遠ざかる」とは，物質の相互作用をもとに長さの基準を定義したときに，銀河間の距離が増大しているという意味である）．この観測事実があるため，そう簡単には宇宙の定常性を主張できなくなった．

とは言っても，宇宙の姿が変わらないという見方が不可能になった訳ではない．銀河が互いに遠ざかっているという観測事実を認めた上で宇宙は定常的だとする定常宇宙論は，1948年にホイルらによって提唱された．

ちょっと考えると，銀河が互いに遠ざかっているならば，宇宙空間の物質密度は次第に低下していきそうである．だが，ホイルらは，真空内部で少しずつ物質が生み出されると仮定すれば，物質密度が一定の値であり続けることが可能だと指摘した．当初は，

具体的なメカニズムは不明ながら真空中で物質が生成されるという曖昧さの残る主張だったが，ホイルは，その後も定常宇宙論の改訂を試みる．例えば，アインシュタイン方程式（第 1 章 (1.19) 式）の左辺に $C_{\mu\nu}$ という項を付け加え，その効果によって，物質密度や圧力が一定になる可能性を模索した．付け加えた項は，C 場という新たな場と見なされる（ホイルは，C 場をスカラー場として導入し，$C_{\mu\nu}$ は C 場を微分したものと考えた）．

ホイルらの努力にもかかわらず，定常宇宙論は成功した理論とは言い難い．最大の問題は，背景放射の存在を説明できないことである．背景放射は，2.7 K の黒体放射に相当するスペクトル分布を示しており，宇宙空間のあらゆる方向から一様に伝わってくる．ビッグバン宇宙論の場合，この放射は，高温だった時期に発せられた光の波長が空間の膨張とともに伸びたものと解釈される．観測可能な広い範囲で高い一様性が観測されるのは，もともと相互作用して平衡状態にあった領域がインフレーションによって膨らんだためと考えれば説明が付く．ところが，定常宇宙論では，宇宙空間は常に冷え切った状態にあり，あらゆる場所が等しく 2.7 K に加熱される理由はどこにもない．

さらに，定常宇宙論でエネルギー保存則をどう考えるかという問題もある．第 4 章で説明したように，エネルギー保存則とは，物理法則が時間によって変化しないという大前提から導かれる法則である．宇宙の姿が時間とともに変わらないとするならば，物理法則も不変だと考えるのが自然であり，エネルギー保存則も成り立たなければならない．ホイルは，C 場の値が時間とともに変化すると考えたが，理由もなしに C 場が変化すると仮定すると，定常宇宙論の根幹的思想である時間に対する不変性が失われてしまう．そこで考えられるのは，C 場のポテンシャルがきわめて緩やかな傾きを持っており，永劫（えいごう）の昔からずっとポテンシャルの坂を転がり落ち続けているという仮説である．これならば，ポテンシャルエネルギーを含めたエネルギー保存則は満たされる．しかし，観測データと合致するような C 場のモデルを作ることはきわめて難しい（例えば，われわれの住む宇宙には物質が圧倒的に多く反物質が少ないが，その理由が説明できない）．

このような理由から，現在では，ホイルらが提案した定常宇宙論を支持する人は少ない．しかし，「宇宙の姿が変わらない」という考え方自体が見捨てられた訳ではない．こんにち観測されている膨張宇宙が定常的だと見なすのは難しいが，これを生み出す母体となった定常的なマザーユニバースが存在すると仮定することなら可能だからである．この考えに従えば，マザーユニバースは永遠に不滅であり，そこで生じた 1 つのエピソードとして，われわれの膨張宇宙が存在することになる．

本章では，こうした現代的な定常宇宙論として，カオス的インフレーション理論とエキピロティック宇宙論を見ていくことにしよう．

8-2 節　カオス的インフレーション

第 3〜5 章で取り上げたインフレーション理論では，初期に急激な加速膨張の時期があった後，インフレーションが終了して現在のフリードマン宇宙になったと仮定されている．この仮定を採用する限り，定常的な宇宙論と結びつけるのは難しい．

しかし，宇宙空間全体が同じように加速膨張を起こし，一斉にインフレーション期を終えたと仮定しなければならない必然性はない．説明が必要なのは観測可能な範囲での一様等方性であって，宇宙全体ではないからである．観測されている範囲ではきわめて一様等方性が高く，地平線のすぐ外側で一様等方でなくなるとは考えにくいので，地平線よりもかなり外側（おそらく 1000 倍程度）まで一様等方性が成り立っているはずだが，それでも空間全域である必要はない．観測データと矛盾さえしなければ，宇宙空間のある部分でインフレーションが継続し，別の部分で終了しているというまだらな状況になってもかまわないはずである．

そこで，インフレーションが起きる条件を，もう一度きちんと見直してみよう．第 3 章 3-4 節で示したケースでは，インフラトン場のポテンシャル $U(\phi)$ の値が $\dot{\phi}^2$ よりも大きい，すなわち

$$\dot{\phi}^2 < U(\phi) \tag{8.1}$$

となることが，インフレーションが起きるために必要な条件である．さらに，インフレーションが終わるのに $U(\phi)$ が小さくなる余地が残されていなければならないので，インフレーション期のインフラトン場はポテンシャルの底から大きく隔たっている必要がある（ポテンシャルの底で (8.1) 式が満たされているならば，宇宙定数によるインフレーションと同じく，いつまでも終了しない）．場をポテンシャルの底から弾き出す最も簡単な方法は高温にすることだが，熱平衡状態では，ポテンシャルエネルギー密度と運動エネルギー密度（それぞれ，$U(\phi)$ と $\dot{\phi}^2/2$ の定数倍となる）がほぼ等しくなるので，熱平衡から外れたまま (8.1) 式の条件が満たされ続けるメカニズムを考えなければならない．このようなメカニズムとして，まず考案されたのが，ポテンシャルが平坦で，インフラトン場が“高止まり”する可能性である．インフラトン場の形に応じて，次の 2 つのケースがある．

(1)　初期のインフレーション理論では，ビッグバンの後にインフレーションが生じたと仮定されていた．このため，初期宇宙はきわめて高温であり，熱的な揺らぎによって，$U(\phi)$ と $\dot{\phi}^2$ がともに大きな値を取ることになる．宇宙が冷えていく過程でどちら

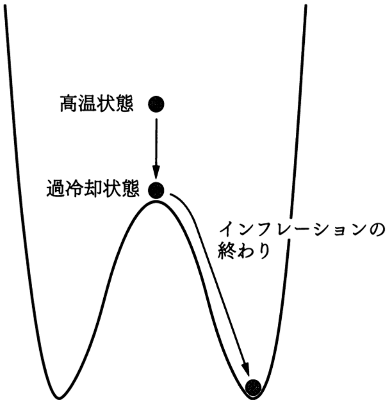


図 8-1　インフレーションの始まりと終わり

も減少していくが，$U(\phi)$ が極値を取る地点（しばしば，ポテンシャルの対称軸に当たる地点で，ここから最小値に落ち込む過程が対称性の破れになる）に取り残されると，$\dot{\phi}^2/2$ が小さく $U(\phi)$ が大きいという“過冷却”の状態になる．過冷却の期間は (8.1) 式の条件が満たされており，インフレーションが起きる．その後，ϕ が極値の地点から移動し，真の最小値に落ち込むと，インフレーションが終了する．ただし，いろいろな観測データと矛盾しないのに必要な期間だけ過冷却の状態を維持するのは，パラメータの調整をしてもかなり難しい．

(2)　$U(\phi)$ の値が大きく傾きがきわめて緩やかな領域が充分に広く，宇宙の初めから ϕ がこの領域にあったと考えられる場合には，(8.1) 式の条件が満たされてインフレーションが起きる．こうしたポテンシャルとしては，第5章5-4節で紹介したコールマン－ワインバーグ型ポテンシャル（第5章 (5.15) 式）があり，現在でも，実際にあり得るポテンシャルの1つとして検討されている．コールマン－ワインバーグ型ポテンシャルの場合，平坦な領域は $\phi = 0$ の周辺になるので，宇宙の初期にインフラトン場が平坦な領域にあったとするのは，充分に自然な仮定である．ただし，第5章で述べたように，観測データと一致させるにはパラメータの微調整が必要である．

これらのケースでは，インフラトン場がしばらくポテンシャルの平坦な領域に留まった後，最小値へと落ち込んでいく．ここで，平坦な領域にあったインフラトン場が最小値に落ち込む単位時間あたりの確率を Γ とすると，平坦な領域に留まっている領域の体

積は，$\exp(-\Gamma t)$ という因子に比例して減少していく．ところが，この間にインフレーションによって空間は指数関数的に膨張していく．ハッブルパラメータ H $(=\dot{a}/a)$ が一定だと仮定すれば，空間体積は $\exp(3cHt)$ に比例して増えていくので，インフラトン場がポテンシャルの平坦領域に留まっている部分の体積も同じように増大する．したがって，$\Gamma < 3cH$ ならば，インフレーションが終了する領域の体積よりも，インフレーションによって増大していく体積の方が大きくなる．この条件が満たされているときは，宇宙空間の大部分でインフレーションが継続し続け，所々でインフレーションが終了し，熱エネルギーが解放されてビッグバンとなる．これが，**永久インフレーション**と呼ばれる状況である．永久にインフレーションを続けているのがマザーユニバースであり，インフレーションの終了した“泡”（“島”“ポケット”などの言い回しをする場合もある）の部分がベビーユニバースとして生み出されていく．

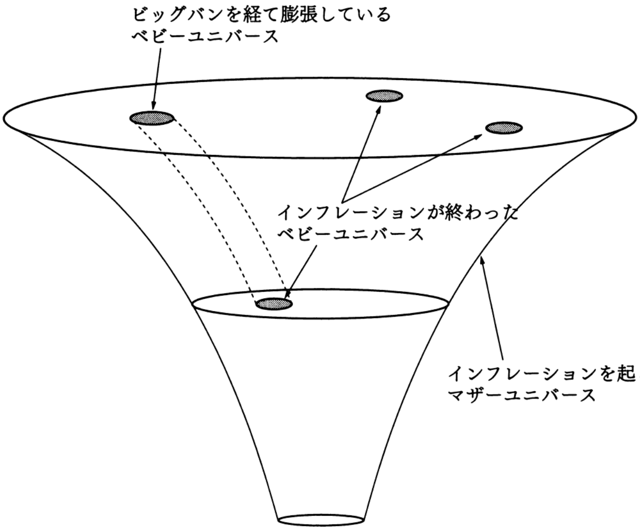


図 8-2　永久インフレーション

語感とは裏腹に，マザーユニバースは不毛な世界である．インフレーションが続いているために温度は低く，物質もほとんどない．一方，インフレーションが終了して誕生するベビーユニバースでは，解放された熱エネルギーが量子場を励起させることで物質が生み出され，天体が形成される可能性も高くなる．それぞれのベビーユニバース内部

での素粒子の種類や質量は，ビッグバンの後で起きる相転移によって決まるので，ベビーユニバースごとに異なったものになると考えられる（詳しくは，第 10 章で述べる）．永久インフレーションでは，異なる物理法則に支配された異世界が無数に生まれることになる．

インフレーションを起こす (1) と (2) のメカニズムに関しては批判的な議論もあるので，このメカニズムに基づく永久インフレーションの議論は，すぐには信用できないかもしれない．それでは，第 3 章 3-6 節で論じたスローローリングのケースで永久インフレーションは起きるのだろうか？

古典論の範囲では，インフラトン場 ϕ は第 3 章 (3.17) 式に厳密に従う．ページをめくる手間を省くために，改めて同じ式を書いておこう．

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -U'(\phi) \tag{8.2}$$

ただし，H はハッブルパラメータで，スローロール近似が成り立っているときには，定数として扱うことができる．

ポテンシャル $U(\phi)$ は，第 3 章図 3-5 に記したような緩やかな形をしているものとする．インフレーションが起きるためには，最初に ϕ がポテンシャルの底から隔たった所にあり，そこからゆっくりとポテンシャルの坂道を下っていかなければならない．このケースでは，ビッグバンはインフレーション後のエネルギーの解放によって起きるので，初期宇宙の熱的な揺らぎによって $U(\phi)$ が大きな値を取っていたとは言えない．ならば，「宇宙の最初期に ϕ の値がたまたま大きかった」という不自然な仮定を採用しなければならないかと言うと，そうではない．インフラトン場も量子論に従う量子場なので，(8.2) 式に厳密に従うわけではなく，量子揺らぎを示すからである．量子揺らぎは，測定誤差などではなく現実に存在する揺らぎであり，場の値が正確に運動方程式の解になっていないことを表す．

インフラトン場の量子揺らぎは第 5 章 5-3 節でも議論したが，このときは場所による ϕ の差異を問題としていたので，モード展開したときの各成分の揺らぎを振動子とのアナロジーから求めた．これに対して，いま求めなければならないのは場所に依存しない成分の揺らぎなので，第 5 章 5-3 節の議論は使えない．導き方は省略するが，古典論での運動方程式が (8.2) 式になるような場の量子論的な揺らぎは，標準偏差 σ が $H/2\pi$ のガウス分布で近似的に表すことができる．したがって，実際のインフラトン場の値は，運動方程式 (8.2) の解から $H/2\pi$ 程度のずれがあると見なされる．

第 3 章 3-6 節で述べたスローロール近似が成り立っているとき，インフラトン場は，ポテンシャルの坂道をほぼ一定の速度で下っている．このとき，時間に関する 2 階微分の項はゼロと置けるので，(8.2) 式から，古典論が成り立つ場合の ϕ の変化率が求めら

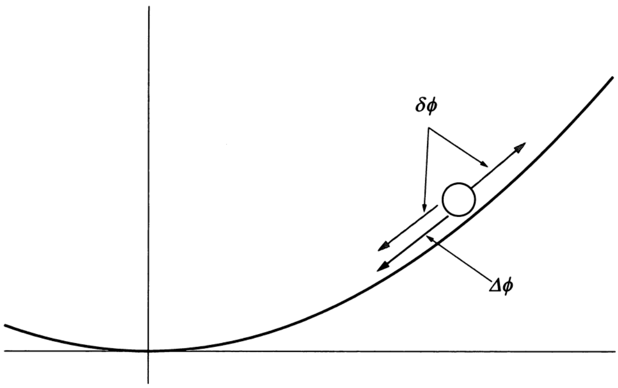


図 8-3　スローローリングの際の揺らぎ

れる．そこで，$\Delta t = 1/cH$ という時間幅を考え，Δt だけ経過したとき，古典論から求められる ϕ の変化を $\Delta\phi$ と表すことにしよう．

$$\Delta\phi \approx \dot{\phi} \cdot c\Delta t \approx -\frac{U'(\phi)}{3H^2} \tag{8.3}$$

Δt が経過したときの ϕ の変化は，運動方程式が厳密に成り立つ場合の $\Delta\phi$ と，量子揺らぎ $\delta\phi$ を加えあわせた式で与えられる（正確に言えば，ϕ の値は確定している訳ではなく，量子揺らぎ $\delta\phi$ による不確定性を持っている）．$\Delta\phi$ はポテンシャルの坂道を下る向きに限られるが，$\delta\phi$ は坂道を上る向きと下る向きが同じ割合で現れるので，$\Delta\phi$ と $\delta\phi$ の大小関係によっては，ϕ が坂道を上っていくこともあり得る（図 8-3）．ϕ がポテンシャルの底に近づくと，スローロール近似が成り立たなくなり，インフレーションが終了してビッグバンになるので，永久インフレーションが実現されるためには，ϕ が増える確率が高くなければならない．そこで，どのような条件が満たされれば永久インフレーションが実現されるかを，やや大ざっぱな見積もりをもとに考えてみよう．

ハッブルパラメータ H が一定のとき，宇宙空間は，時間 t に対して $\exp(3cHt)$ という割合で増大していくので，$\Delta t = 1/cH$ だけ時間が経過する過程で，宇宙空間は，$e^3 = 2.718^3 \approx 20$ 倍に膨張する．したがって，初めに差し渡しがハッブル距離 $l_H = 1/H$ に等しい領域があったとすると，この領域は 20 倍の体積に膨れ上がる．ところが，ハッブル距離は相互作用が可能な限界を表しているので，20 倍に膨張した結果，互いに相互作用しない 20 個の領域に分かれたと見なすことができる．この 20 個の領域のそれぞれにおいて，ϕ の値は膨張前よりも増えたり減ったりしているが，ϕ が増えた領域で

は確実にインフレーションが続くことになるので，20 個のうち平均して 1 個以上の領域で ϕ が増えているならば，インフレーションは永久に続くことになる．ϕ が増えるのは，(8.3) 式で与えられる $\Delta\phi$ よりも量子揺らぎ $\delta\phi$ の方が大きくなる場合である．$\delta\phi$ はガウス分布に従っており，$\delta\phi$ が $\Delta\phi$ よりも大きくなる割合が全体の 1/20 以上になるのは，標準偏差 σ（$= H/2\pi$）の 1.65 倍が $\Delta\phi$ よりも大きくなる場合である（図 8-4 参照）．したがって，永久インフレーションが起きる条件式は，次のようになる．

$$\frac{1.65H}{2\pi} \gtrapprox |\Delta\phi| \approx \frac{U'(\phi)}{3H^2} \tag{8.4}$$

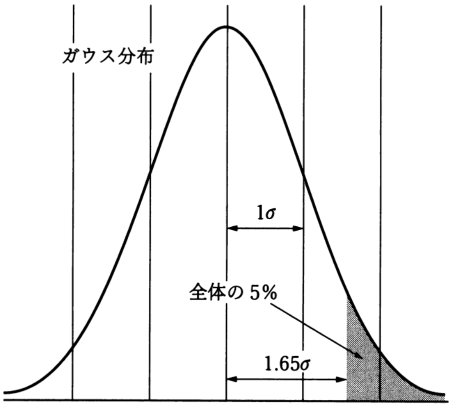


図 8-4 ガウス分布

インフラトン場のポテンシャル $U(\phi)$ を限定して，見積もりを続けることにしよう．$U(\phi)$ の形を決定する手がかりがほとんどないが，ここでは，特に単純な次の形を仮定してみる．

$$U(\phi) = \frac{1}{4}b\phi^4 \tag{8.5}$$

ϕ の 2 乗の項を使わなかったのはそれほど深い意味はないが，この形にしておけば，多項式の係数として次元を持つ量を導入する必要がない．

ハッブルパラメータ H の値は，アインシュタイン方程式（第 3 章 (3.7) 式）を使って求めることができる．第 3 章 (3.7) 式の左辺において，$\lambda = 0$（インフレーションは宇宙定数 λ ではなくインフラトン場によって引き起こされる），$k = 0$（インフレーションに

よって空間が引き伸ばされ曲率項は無視できる）と置く．さらに，右辺の ρc^2 をインフラトン場のエネルギー密度（第 3 章 (3.13) 式）で置き換え，インフレーションが起きているときはポテンシャルエネルギーの方が大きいことより，ϕ の時間微分の項を落としてしまうと，次式が得られる．

$$3H^2 \approx \kappa\hbar c U(\phi) \qquad \left(\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}\right) \tag{8.6}$$

ここで，第 7 章 (7.12) 式で定義したプランク長 l_P と (8.5) 式を使って (8.6) 式を書き換えると，

$$H \approx \sqrt{\frac{2\pi b}{3}} l_P \phi^2$$

となる．これより，永久インフレーションが起きるための条件 (8.4) は，次の不等式になることがわかる．

$$|\phi| \gtrapprox \left(\frac{1}{1.65 \times \sqrt{2\pi/3}}\right)^{1/3} \frac{b^{-\frac{1}{6}}}{l_P} = 0.75 \times \frac{b^{-\frac{1}{6}}}{l_P}$$

この条件は，現実的なモデルで満たされるのだろうか？　永久インフレーションは，未来永劫インフレーションを起こし続けるマザーユニバースがあり，そこからいくつもビッグバン宇宙が生まれてくるというものだが，過去に遡っていっても永遠にインフレーションが続くのかどうかは，はっきりしない．少なからぬ研究者は，過去のある時点でマザーユニバース自体が生まれたと考えている．誕生直後のマザーユニバースは，重力場の量子揺らぎがきわめて大きかったと推測されるが，量子重力理論はいまだ完成しておらず，量子揺らぎの大きさもきちんと見積もる方法がない．しかし，量子重力理論では，プランク長 l_P があらゆる現象の基礎になる基本的な量だと考えられており，量子揺らぎの大きさも，場のポテンシャルエネルギー密度（$\hbar c U(\phi)$）が，プランク長から作られるエネルギー密度の次元を持つ量（$\hbar c/l_P^4$）と同程度になるという条件から定まると予想される．したがって，この時期のインフラトン場に関しては，次の式が成り立つだろう．

$$|\phi| \sim \frac{\sqrt{2} b^{-\frac{1}{4}}}{l_P} \tag{8.7}$$

（この式は，ϕ の値ではなく，右辺の程度の揺らぎを持つことを表しているので，「∼」という記号を用いた．）

係数 b の値を決定するのは難しいが，第 5 章 5-3 節で説明したように，インフラトン場の量子揺らぎから質量密度の揺らぎが生じると仮定し，観測データと比較すると，b

は 10^{-12} の程度になると推定される（この値が不自然に小さいので，スローローリングが起きるインフレーションに対して批判的な目を向ける研究者も少なくない）．この値を採用すると，(8.7) 式の揺らぎを持つ ϕ は，永久インフレーションが起きるための条件 (8.4) を満たしていることがわかる．

以上の見積もりは，後半で仮説の上に仮説を積み重ねているので少々怪しげな議論になっているが，スローロール近似が成り立つようなケースでも永久インフレーションが起きる可能性があるということは，認めても良いだろう．このとき，インフレーションが維持されるかどうかは量子揺らぎという偶然の過程によって決まるので，全くの偶然によって，空間のある部分ではインフレーションが続き，ある部分ではインフレーションが終了してビッグバン宇宙が始まる．こうした状況を称して，**カオス的インフレーション**と呼ぶ．

カオス的インフレーションが続いている状況では，宇宙全体の様相は時間とともに変化しない．しかも，空間の膨張が続き，ベビーユニバースが次々と誕生しているにもかかわらず，（第 4 章で説明したように）「時間の経過によって物理法則が変わらない」という意味でのエネルギー保存則は満たされている．したがって，カオス的インフレーション理論は，ホイルらが提唱した定常宇宙論の現代的な改良版と言っても良いものである．

ただし，ここで困った問題が起きる．次々と誕生するベビーユニバースは，必ずしもわれわれの宇宙と似たものにならず，物理法則が大幅に異なっていることもあり得る．こうした“異世界”が無数に生まれていると認めるのは，いささか心理的な抵抗感を禁じ得ない．宇宙が統一されたユニバース（universe）ではなく，無数の異世界から構成されたマルチバース（multiverse）であるという可能性については，第 IV 部で論じる．

8-3 節　　超ひも理論の宇宙

われわれが目にしている宇宙よりも“巨大な”宇宙がほぼ定常的な状態で存在しており，その内部での 1 つのエピソードがわれわれの宇宙だという現代的な定常宇宙論のアイデアは，超ひも理論の枠内でも取り上げられている．超ひも理論とは，標準模型を超える素粒子の統一モデルとして提唱されたものだが，時空次元の数が 10 になるなど独特な理論構成になっており，超ひも理論固有の宇宙論が構築されている．

超ひも理論そのものは，かなり多くの（ただし過半ではない）研究者に支持されているが，いまだ正当性が検証されている訳ではない．超ひも理論に基づく宇宙論は，他の理論体系への転用がきわめて困難なので，もし超ひも理論が現実に合致しないとして棄

却されることになれば，超ひも理論に基づいて作られた宇宙論は全て存立基盤を失ってしまう．そうした危うさがある一方で，他の理論には見られない斬新な世界観を提供してくれるという魅力もあり，勉強すべきかどうか悩ましい所である．

超ひも理論は，場が粒子的な振舞いをする量子場の理論とは異なり，場が 1 次元的に拡がったひものように振舞うという理論である．詳しい説明は省略するが，ひもの運動を記述する式に自己矛盾が生じないようにするためには，時空の次元は 10（複数の超ひも理論を統合する M 理論では 11）でなければならない．現実に観測されているのは，時間 1 次元，空間 3 次元の計 4 次元なので，6 次元が余剰である．この 6 つの余剰次元をどうするかが，超ひも理論を構築する上で大きな問題となる．

最も一般的な方法が，余剰次元が小さく丸まっているというもので，カルツァ－クライン機構と呼ばれる．閉じたフリードマン宇宙では 3 次元空間が球面状になっているが，超ひも理論では，大きく拡がった次元と小さく丸まった次元があるので，イメージとしては，細い円筒状の空間になる．仮に w 軸方向の次元が長さ d の拡がりしか持たないとすると，w 軸方向に d だけ進むと元の場所に戻ってしまうことになるので，式の上では，w と $w+d$ を同一視しなければならず，w を引数とする関数は，全て周期 d の周期関数となる．d が充分に小さければ，6 つの余剰次元が物理法則に影響を及ぼすことはほとんどなくなり，実質的に 4 次元時空が現れる．

カルツァ－クライン機構の他に，もう 1 つ余剰次元を扱うやり方がある．これが**ブレイン宇宙論**と呼ばれるもので，以下では，このアイデアについて説明していきたい．

ブレインとは，超ひも理論に現れるオブジェクトである．ブレインが何であるかを簡単に説明するのは難しいので，アナロジーを使うことにしよう．

例として，強磁性体を取り上げる．鉄やコバルトなどの強磁性体では，隣合う原子のスピンが同じ向きに揃うような相互作用が働くため，ある領域の原子のスピンが自発的に同じ向きを向く性質を持つ．これが自発磁化であり，スピンの向きが揃っている領域を磁区と呼ぶ．低温ではスピンは揃いやすいが，温度が高くなると熱運動のためにスピンの向きは揃いにくくなる．自発磁化のない高温状態から強磁性体の温度を下げていくと，ある臨界温度（キュリー温度）で相転移を起こして自発磁化が起きる．ところが，マクロな物体の場合，物体全体が 1 つの磁区になることはあまりなく，いくつかの磁区に分かれてしまう．このとき，磁区の境界になる部分は，磁壁と呼ばれる薄い層状になっている．磁壁は，磁性理論の中にもともと存在する物体ではないが，移動や変形をさせようとするとエネルギーを必要とするなど，あたかも物体のように振舞うことが知られている．

ブレインも，強磁性体の磁壁と同じように，構成要素として超ひも理論に含まれている訳ではなく，場の状態として生じるものだが，物体と同じように，外部からの作用に

よって移動や変形させることが可能である．超ひも理論では，標準模型に現れる素粒子は，粒子状ではなくひも状の励起状態と解釈されるが，これ以外にブレインというオブジェクトが存在することになる．

磁壁が強磁性体という3次元の拡がりを持つ物体内部の2次元的なオブジェクトで，強磁性体の表面以外には縁が存在しないのと同じように，ブレインは，10次元以下の次元数を持つオブジェクトで，縁がなくどこまでも拡がっている．ちなみに「ブレイン(brane)」という語は“膜”を意味する「メンブレイン（membrane)」に由来するが，時空の次元数以下の次元を持つという性質が膜に似ているためである．ブレイン宇宙論では，10次元時空（その中のいくつかの次元は小さく丸まっているかもしれない）の内部に，さまざまな次元数のブレインが浮かんでいるという描像が成り立つ．ブレインは重く動かしにくいが，固定されている訳ではなく，運動したり変形したりすることがある．

ブレインの大きな特徴は，ひもの端がブレインに限定される点である．（あるタイプの）超ひも理論において，ひもには，リング状で端のないもの（閉弦）と両端のあるもの（開弦）の2種類があるが，このうち，開弦の2つの端はブレイン上に位置していなければならないという制限がある．通常の物質を構成する素粒子は開弦だと考えられているので，物質はブレインから離れることができない．（時間を別にして）4次元空間の内部に3次元のブレインが存在するケースを考えてみよう．このとき，物質は3次元のブレイン内部でしか動き回れない．もし生物が存在するならば，物質が束縛される3次元のブレイン内部しか動き回れず，4次元の拡がりを実感することはできない．

ただし，重力まで考えると，話はそう単純ではなくなる．超ひも理論によれば，重力は閉弦によって伝播されるので，ブレインから離れることができる．したがって，物質がブレイン内部に束縛されているとしても，物質が作る重力場はブレインの外側にも拡がっていく．質点が周囲に及ぼす重力の強さが距離の逆2乗に比例するというニュートンの重力法則は，3次元空間の全ての方向に同じように重力が伝播すると仮定することで一般相対論から導き出される．したがって，ブレインの外側に4番目の空間次元があり，この次元にも重力が拡がるとすると，逆2乗則が近似的にも成り立たないように思える．逆2乗則が成り立たなければ，単に観測データに矛盾するだけではなく，そもそも天体が形成されず生命が発生することもないだろう．ブレインは，不毛の世界になってしまう．

ところが，1999年にランドールとサンドラムによって，（ある条件の下では）ブレインの外側の重力場が内側とは質的に異なるゆがみを持ち，ブレイン内部で近似的な逆2乗則が成り立つことが示された．このとき，ブレインは，その内部で天体の形成も可能な1つの宇宙空間と見なすことができる．人間を含むあらゆる物質的存在が3次元のブレイン内部に束縛されていると考えても，観測データと矛盾しない．われわれが3次元

の宇宙空間だと思っているものが，実は，4 次元以上の空間内部に存在するブレインだということになる．これが，ブレイン宇宙論の考えである．

ブレインの外側で重力場がどうなるかを，簡単化した議論で見ていくことにしよう．この議論では，ブレインの存在以外には超ひも理論の性質は必要なく，高次元のアインシュタイン方程式だけが利用される．

時間 1 次元，空間 4 次元という 5 次元時空——表記を簡単にするため，以下では $(1+4)$ 次元時空と書くことにする——の世界を考え，4 次元の空間内部に 3 次元のブレインが存在すると仮定する．強磁性体の場合，磁壁の両側で磁場の向きが異なっているため，磁壁に垂直な座標の関数として磁場を表すと，磁壁を境に値が飛ぶことになる．これと同じように，ブレインを横切る座標に対して重力場は滑らかな関数では表せない．この性質が，ブレインの周囲に大きくゆがんだ重力場をもたらすことになる．

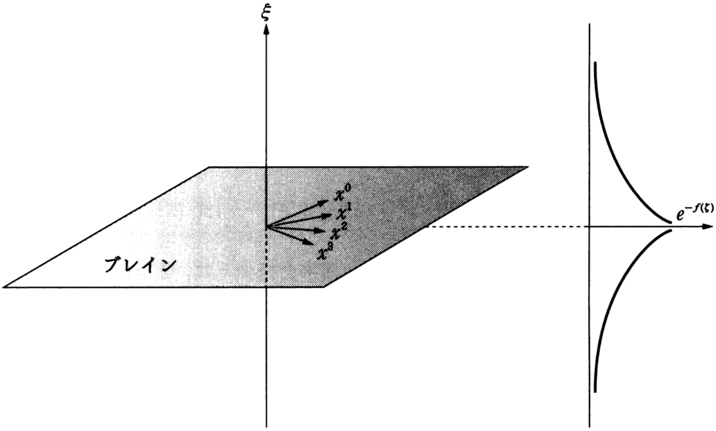


図 8-5　ブレイン宇宙

$(1+4)$ 次元時空で見たとき，ブレインは平らで静止している場合を考える（図 8-5）．ブレインに対して垂直な座標を ξ，それ以外の座標を x^0，x^1，x^2，x^3 とし，ブレインは $\xi=0$ にあるものとする．図 8-5 では，図を描く都合上，ブレインが 2 次元の面であるかのように表されているが，実際には，ブレイン内部に 4 つの座標軸を取れる $(1+3)$ 次元である．また，図 8-5 の 2 次元の面は，正しくは縁がなく無限に広がっていると見なすべきだが，それと同じように，$(1+3)$ 次元のブレインにも縁がない．ブレイン内

部にいる観測者には，果てのない無限の空間と，過去から未来へと永遠に続く時間が拡がっているように見える．あらゆる物質は $\xi = 0$ のブレイン上に束縛されており，ξ 方向の拡がりは物質の相互作用に関与しない．もちろん，ブレインの表面は，ξ 方向の拡がりの中で初めて観測できるものであり，ブレインに束縛された観測者に窺（うかが）い知ることはできない．

ブレイン内部の $(1+3)$ 次元時空は完全に一様等方で，ミンコフスキ計量で表されるものとし，ブレインに対して垂直な ξ 方向の重力場がどうなるかを調べよう．ξ 以外の座標に対して重力場は変動していないので，次のような形の計量テンソルを考えれば良い．

$$ds^2 = e^{-f(\xi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\xi^2 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

ここで，$\eta_{\mu\nu}$ は 4 次元時空のミンコフスキ計量を表しており，その係数が見えない空間次元 ξ に依存している（指数関数にしたのは，単なる便宜である）．この計量を使ってアインシュタイン方程式を立てれば，ブレインの周囲の重力場が求められる．

このときのアインシュタイン方程式は，単なる真空の式ではなく，ブレイン自体がエネルギーを持つことによる項が付け加わる．厳密な式は難しくなるので，次の一般的な形で書いておく．

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} - \lambda g_{AB} = -K_{AB}\delta^A_\mu \delta^B_\nu \delta(\xi) \qquad (A, B = 0, 1, 2, 3, 4) \qquad (8.8)$$

K_{AB} は，座標に依存しない定係数である．添字を持つ δ は，2 つの添字が等しいときに 1，それ以外では 0 となるクロネッカーのデルタ，関数の形の δ は，引数が 0 以外では 0 を与え，0 を含む領域で積分したときに 1 を与えるデルタ関数である．ここでは，この方程式を解くことはしない（し，実は (8.8) 式のままでは方程式を解くことはできず，ブレインを 2 枚用いるなどして ξ 方向の境界条件を工夫する必要がある）．ただし，次のような振舞いが見られることは指摘しておこう．

(8.8) 式の左辺は，重力場の 2 階微分を含んでいるので，方程式を書き換えていくと，大まかに言って次のような形の式が現れる（ダッシュは引数に関する微分を表し，係数などは正確ではないので“$\sim$”を使った）．

$$f''(\xi) \sim 2\delta(\xi)$$

デルタ関数の性質より，この式は積分することができる．

$$f'(\xi) \sim \Theta(\xi)$$

ただし，$\Theta(\xi)$ は，$\xi < 0$ で -1，$\xi > 0$ で 1 となる階段関数である．これをさらに積分すると，

$$f(\xi) \sim |\xi|$$

を得る．こうして，ブレイン近傍での計量テンソルが次の形になると予想される．

$$ds^2 = e^{-2k|\xi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\xi^2 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{8.9}$$

k は，ブレインのエネルギーに関係する定数である．計量テンソルが滑らかな関数になっていない点が特徴的である．

ブレインから遠ざかるにつれて重力場の値が急激に減少することから，ブレイン内部の質量が作る重力場がブレインの内側と外側で質的に異なる振舞いをすると予想される．実際にどのような重力場になるかを計算するには専門的な知識が必要になるので，具体的な計算過程は記さないが，ブレイン内部の計量テンソルがミンコフスキ計量からわずかにずれた式を使わなければならない．

$$ds^2 = e^{-2kH(x)|\xi|}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)dx^\mu dx^\nu + H^2(x)\,d\xi^2$$

この式では，x という記号でブレイン内部の $(1+3)$ 次元時空の座標を代表させている．

$h_{\mu\nu}$ の成分が 1 より充分に小さいという近似を用いて計算すると，ブレイン内部にある質量 m と M の 2 つの質点の間に働く重力が求められる．計算した結果は，2 点間の距離 r の逆 2 乗に比例するというニュートンの重力理論に，$O\left(1/r^2\right)$ の補正項がついた形になる．重力ポテンシャルの形で表すと，次のようになる．

$$U = G\frac{mM}{r}\left(1 + \frac{1}{k^2r^2}\right)$$

k がある程度大きければ，これは，現在の重力の観測データと矛盾しない．したがって，われわれは実際にブレインの中に住んでおり，観測することはできないものの，その外側に別の次元が拡がっている可能性も否定できないのである．

8-4 節　エキピロティック宇宙論

ブレイン宇宙論が正しいとすると，ブレインが浮かんでいる高次元時空が真の宇宙であり，われわれが観測しているのは，1 つのブレインの内部でしかない．宇宙全体の歴

史は，ブレイン同士の相互作用を抜きにしては語ることができず，ビッグバン以来膨張を続けているわれわれのブレイン世界の発展消長は，宇宙全体から見るとささやかなエピソードにすぎないことになる．

1 つのブレイン内部でビッグバンに始まる空間の膨張が起こり得ることは，2001 年にスタインハートやテュロックらが提唱した．(8.9) 式に示されるように，ブレインの周囲には重力場が存在しており，2 枚のブレインの間には，互いに力が働く．引力が作用する場合，ブレイン同士が互いに引きつけあって衝突することもあるだろう．こうした衝突によってブレイン内部が高温のビッグバン状態になり，そこから膨張が始まることも考えられる．さらに，ブレイン同士の衝突が 1 回しか起きないとは限らない．高次元時空の中で何回も衝突することが予想されるので，衝突の度に新たなビッグバンが起きることになる．古代ギリシャのストア派は，宇宙が繰り返し業火に焼かれ再生するという思想を持っており，破壊と再生の過程をエキピローシスと呼んだが，それになぞらえて，ブレイン同士の衝突でビッグバンが起きる宇宙は**エキピロティック宇宙**と名付けられた．

エキピロティック宇宙論には，ビッグバン以前のインフレーションは存在しない．それでは，インフレーション理論によって解決できるとされた平坦性問題や地平線問題にはどう答えるのだろうか？ これに対しては，「ビッグバン以前に平坦で一様だったから」という解答が与えられる．第 3 章で説明したように，古典的なビッグバン理論では，ビッグバン以前に状態を均一化するプロセスがないため，地平線問題が解決できなかった．ところが，エキピロティック宇宙論では，ブレインの衝突が起きる前の状態を考えることができる．ブレインは，自身が持つ張力によって自然に平坦になる傾向にあり，ビッグバン以前には，この平坦な空間内部で，充分に長い時間を掛け広範囲で均一な状態が実現されていたと推測される．ここに別のブレインが衝突してくるので，衝突後に膨張を始める宇宙空間も，充分に平坦で地平線まで一様になっていたという訳である．ブレインにはわずかな揺らぎがあるため，場所によって衝突する時刻に差が生じるが，これが，質量密度の揺らぎとして観測されることになる．

こうした理論的な予測は，ブレインのダイナミクスがきわめて単純だという前提の下で立てられたが，その後の研究で，ブレインはもう少し複雑な振舞いをすることがわかってきた．このため，エキピロティック宇宙論には，いろいろな修正が施されることになる．

新たなアイデアの 1 つは，2 枚のブレインの間の重力場に蓄えられるポテンシャルエネルギーが，ブレイン世界の暗黒エネルギーの役割を果たすというものである．これによって，ブレイン内部でインフレーションが起きる可能性も出てきた．ブレイン間のポテンシャルによってインフレーションが起きるという理論は，すでに何通りも提案され

ている．例えば，ブレインの周囲の余剰次元が図 8-5 に描かれるような平坦なものではなく，複数の余剰次元が複雑に入り組んだ構造をしており，その構造の変化がブレイン内部の暗黒エネルギーを変化させて，インフレーションを起こしたり終わらせたりするというアイデアもある．こうした理論は，いずれも研究途上であり，有力な理論に成長していくかどうかは，いまだはっきりしていない．

20 世紀に確立されたビッグバン宇宙論は，宇宙が高温・高圧のビッグバンによって始まったという“定説”を作り上げた．しかし，1980 年代に始まる現代的な宇宙論は，この始まりをさらに遡ろうと模索を続けている．第 6 章では，宇宙の始まりを表す波動関数を考察した．第 7 章では，ビッグバンは収縮してきた空間が膨張に転じるターニングポイントにすぎないという振動宇宙の可能性を示し，第 8 章では，巨大なマザーユニバース内部の 1 つのエピソードとして，ビッグバンから始まるベビーユニバース（あるいはブレイン世界）が存在するという理論を解説した．これらの理論は，必ずしも互いに排他的という訳ではない．例えば，永久インフレーションを続けているマザーユニバースは，第 6 章で示した量子論的な波動関数から始まったのかもしれないし，エキピロティック宇宙論では，2 枚のブレインの距離が周期的に変化することで，膨張・収縮を繰り返す振動宇宙が実現される可能性が指摘されている．このように，宇宙の始まりに関しては，さまざまなアイデアが提案されて面白い状況にあるとも言えるが，その一方で，どのアイデアが正当かを検証する観測データがほとんどないというのも事実である．

第 IV 部

並行宇宙

ここ 10 年ほどの間に，われわれの宇宙以外にも数多くの宇宙が存在する可能性について，科学雑誌の特集や単行本で語られる機会が増えてきた．こうした複数の宇宙をまとめて，並行宇宙（parallel universes）と呼ぶことにしよう．現在，物理学者たちが真剣に議論している並行宇宙の考え方には，量子揺らぎの中にいくつもの世界が重なり合っているという量子論の多世界解釈（many-worlds interpretation）と，近似的にフリードマン模型で記述されるような宇宙がいくつも存在するという多重宇宙（multiple universes）のアイデアがある．前者の多世界解釈は第 11 章で取り上げ，第 9 章・第 10 章では，後者の多重宇宙について議論する．

この 2 つ以外にも，フリードマン模型で記述される宇宙空間の内部に，そっくりの物理現象が生起している領域がいくつも存在するという並行宇宙のアイデアもあるが，これについては，第 9 章 9-7 節で簡単に触れる．さまざまな並行宇宙に関しては，グリーン著『隠れていた宇宙』（早川書房）で，まとめて解説されている．

第 9 章

物理定数の異なる宇宙

9-1 節　ユニバースとマルチバース

宇宙を意味する英語のユニバース（universe）は，「1 つに（*uni-*）向ける／変える（*-vert*）」の名詞形で，「ひとまとまりになった全体」という意味であり，宇宙を統一体として捉える宇宙観を表す．これに対して，宇宙がいくつも存在すると主張する物理学者たちは，マルチバース（multiverse）なる造語を編み出し，宇宙が 1 つではないことを強調している．

それでは，ユニバースとマルチバースとは，具体的に何を指しているのだろうか？一般相対論に基づく宇宙論では，時間と空間をひとまとまりにした 4 次元多様体を宇宙のモデルとして扱ってきた．したがって，こうした 4 次元多様体がユニバースに相当するように思えるかもしれないが，必ずしもそうではない．例えば，第 8 章 8-2 節で解説したカオス的インフレーション理論では，インフレーションが終了して加熱される領域が，マザーユニバースとなる 4 次元多様体の内部に“泡”のように現れるが，マルチバースの提唱者は，こうした“泡”のそれぞれが 1 つのユニバースに対応すると見なしている．個々の“泡”を全てあわせたものが，マルチバースである．

“泡”をユニバースと見なす理由の 1 つは，“泡”同士の交信が不可能だからである．“泡”の間に存在する領域は，超光速で膨張を続けるので，“泡”から“泡”へと信号を送ることはできない．もう 1 つの大きな理由が，“泡”がビッグバンの高温状態から始まることにある．以降の議論で示すように，高温状態を経ることによって物理定数の一部がリセットされ，他とは異なる固有の性質を持った領域となる．この領域は，その内部だけで成立する物理法則に支配された統一体と考えられるので，ユニバースと呼ぶに相応（ふさわ）しい．

エキピロティック宇宙論でも同様である．いくつかのブレインを含む全宇宙は，4 次

元よりも大きな次元数を持つ多様体を形作っているが，マルチバースの主張者にとって，この多様体は必ずしもユニバースではない（マザーユニバースと呼ばれることはある）．ブレイン同士が衝突すると，空間が3次元となる特定ブレインの内部が加熱されるが，この3次元空間の世界が，ビッグバンから始まるユニバースに相当する．

ビッグバンの高温状態が物理定数の一部をリセットする（少なくとも，その可能性がある）ことは，1970年代後半に素粒子論と宇宙論を結びつける契機となり，インフレーション理論を含む現代的宇宙論の隆盛につながっていく．以下では，物理定数の分類から始めて，ビッグバンの高温状態が物理定数の値にどのようにかかわってくるかを説明したい．

マルチバースに関する用語法が学界で統一されている訳ではない．カオス的インフレーション理論で言えば，本書では，永遠に加速膨張し続ける全体をマザーユニバース，マザーユニバース内部に生まれる“泡”をユニバースと呼んでいるが，人によっては，全体をユニバース，“泡”をベビーユニバースないしサブユニバースと呼ぶこともある．本書における用語法は，ビッグバンの高温状態に始まり近似的にフリードマン模型で記述される対象を「ユニバース」と呼ぶ伝統的な宇宙論に準じている．

9-2節　物理定数の種類

物理定数とは，一般的に言えば，物理学的な計算を行う際に一定値を取ると見なせる量であり，物理学を勉強する学生には，具体的なイメージができあがっているだろう．しかし，どんな状況下でも値は変わらないのか，他の定数をそこから導けるような基礎定数は何個あるのか——といった論点に関しては，必ずしも解明されているわけではなく，物理学の教科書などであまり説明されていない．ここでは，物理定数を次のように分類することから始めよう．

①**定義数や換算定数：**　定義数とは，式を簡明にするためなどに便宜的に導入されるもので，アボガドロ定数（12グラムの炭素12に含まれる原子数で，$6.02\cdots\times10^{23}$）や真空の透磁率 μ_0・誘電率 ε_0（MKSA単位系では $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$，$\varepsilon_0=1/\mu_0c^2$）などがある．また，換算定数とは，物理的には同じ尺度で表されるはずの量を人間が異なる尺度で表している場合に，両者を換算するための定数で，熱の仕事当量 J（熱量とエネルギーの換算）やボルツマン定数 k（熱力学的な温度とエネル

ギーの換算）が代表的な例である．

②状態に依存する定数：　ある限られた状況で定数として扱える量．例えば，水の沸点 100°C は，1 気圧の下でのみ定数として扱える．また，太陽定数 1366 W/m^2 は，地球表面に垂直に入射する太陽からのエネルギーの値だが，実際には，0.1% 程度の変動を示しており，この程度の誤差が無視できる場合に定数として扱われる．

③普遍定数：　状態や場所によらず普遍的に一定値を持つとされる量（「普遍的」という言葉が何を意味するかは，すぐ後で議論する）．基礎理論を定義する際に最低限必要とされる**基礎定数**と，基礎理論を使って導かれる（はずの）**誘導定数**に分けられる．ただし，究極的な基礎理論が何かはわかっておらず，暫定的に一般相対論や量子場理論を基礎理論として利用している段階である（超ひも理論が究極の理論だという見方もあるが，実証されていない）．また，誘導定数が，実際の計算によって導けるとは限らない．例えば，電子の磁気モーメントは，量子電磁気学を用いて，電子の質量や電荷などを含む式で与えられ，測定値と高い精度で一致しているが，陽子や中性子の質量は，素粒子の標準模型を使って計算できるはずの誘導定数だと信じられているものの，適切な近似法が見つかっていないため，測定値を再現するのは今のところ困難である．

上のような分類は一見合理的だが，全ての物理定数の分類が確定している訳ではない．以前には物質の性質を表すと思われていた量が，実は，①の定義数／換算定数に分類し直されることも少なくない．真空の誘電率や透磁率も，マクスウェルの時代には電磁気を伝える媒質の性質だと考えられていたが，現在では，電荷や電流に（1 メートル離れたときに 1 ニュートンの力が働くといった）人為的な尺度を与えたときに必要となる定義数だと見なされる．ちなみに，MKSA 単位系を用いるのは工学系の技術者が多く，理論物理学の研究者は，通常，$\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ となるガウス単位系やヘヴィサイド単位系を用いる．

20 世紀に①に分類し直された定数として重要なのが，光速 c とプランク定数 $\hbar$（本来のプランク定数 h を 2π で割ったもので，換算プランク定数とも呼ばれるが，「換算」という語がかぶるのを避けるために，単にプランク定数と呼ぶことにする）である．光速 c は，光が伝播する速さと言うよりも，秒とメートルという便宜的に定めた時間と空間の単位を換算するために必要となる定数である．現在では，科学技術データ委員会によって $c = 299792458$ [m/s] と定義されており，誤差はない．1 メートルの定義は，以前はクリプトン原子が発する光の波長をもとに決められていたが，1983 年に「真空中の光が 1 秒間に進む距離の 1/299792458」と変更された．

プランク定数 $\hbar$ は，量子論的な重ね合わせの際に現れる位相因子 $\exp(iS/\hbar)$（S：作用）の値を決めるのに必要な量だが，現象論的には，アインシュタインの関係式 $E=\hbar\omega$（E：光子のエネルギー，ω：光波の角振動数）などを通じて，粒子性と波動性に関する諸量を結びつける．粒子性と波動性が独立した性質で，両者の関係が（単なる定義式や換算式ではない）物理的な方程式を通じて関係づけられるのならば，プランク定数は普遍定数と見なされる．ところが，量子論では，粒子性と波動性は同じ現象を異なる観点から記述したときの性質であり，それぞれの記述に現れる物理量は，単純な換算式で結ばれていなければならない．プランク定数とは，そこで使われる換算定数である．

熱の仕事当量 J を 1 と置いて熱量とエネルギーに同じ単位を用いても不都合が生じないのと同じように，光速 c とプランク定数 $\hbar$ を 1 と置いて新たな単位系を作ることができる．この単位系は，人為的に定めた尺度をあれこれと使わないので，**自然単位系**と呼ばれる．自然単位系では，作用 S は無次元となり，時間および空間の長さの逆数・質量・エネルギーなどが同一の尺度で表される（人為的な尺度が 1 つは必要になる）．

一方，電子やクォークなどの質量，電子の電荷 $-e$ などでは事情が異なり，いずれも 1 と置いてしまうと，方程式の別の箇所に新たな定数を導入して帳尻を合わせなければならなくなる．したがって，これらは①のタイプの定数（定義数や換算定数）ではない．

電子の質量 m や電荷 $-e$ の値が天文学的な範囲にわたって一定であることは，電波天文学の観測データを通じて確認できる．例えば，水素原子のスペクトルを表すリュドベリの式には me^4 という係数が現れるので，m や e の値が地球上での値からずれていると，スペクトルが理論的な予測と異なるはずである．数十億光年彼方のクェーサーに関する観測データが予測と一致することから，数十億年前の遠方の天体でも，電子の質量や電荷は現在の地球と同じ値だと考えられる（ただし，一部のクェーサーでは予測からのずれが見いだされており，原因の検討がなされている最中である）．現代的な宇宙論が登場するまでは，電子の質量や電荷は，場所や状態によらずに同じ値となる普遍定数だという見方が支配的だった．

しかし，こうした見方は，1960 年代後半から段階的に変更されていく．まず，電子の質量や電荷の値が，空間に凝縮したスカラー場（ヒッグス場）に影響されるという理論が提出された（具体的な相互作用の形が考案されるのは，1968 年のワインバーグとサラムの論文においてである）．1970 年代半ばになると，スカラー場の凝縮がビッグバンの高温状態から温度が低下していく際に生じること，凝縮の仕方は一意的ではなく偶然に左右される余地があること——などが示された．カオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論によると，ビッグバンの高温状態から始まるユニバースがいくつも誕生しているはずである．とすると，電子の質量や電荷の値は，それぞれのユニバースの状態に依存することになり，物理定数の分類で言えば②のタイプに該当する．少々穿（うが）

った言い方をすれば，これらの定数は，ユニバーサルではあっても，マルチバーサルではない．水の沸点や太陽定数が地球と異なる惑星が存在するのと同じように，われわれの住むユニバースとは物理定数の異なるユニバースが，現実に存在するかもしれないのである．

改めて強調しておくが，カオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論は，検証された訳でも大半の研究者に支持されている訳でもない．マルチバースのアイデアは，あくまで，あり得べき宇宙の姿の 1 つでしかない．しかし，これまで神話やファンタジーの中でしか語れなかった異世界の存在を物理学的に議論している点で，きわめて興味深い．

9-3 節　スカラー場の凝縮の効果

あるスカラー場が凝縮すると，これと相互作用する他の場の振舞いにも変化が生じる．このことを示すために，次のシンプルな（現実的ではない）ラグランジアン密度で表される相互作用を考えてみよう．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A\partial_\nu A - \frac{1}{2}g^2\phi^2 A^2 \tag{9.1}$$

g は，2 つの場 A と ϕ を結びつける定数なので，**結合定数**と呼ばれる．また，時空は平坦でミンコフスキ計量 $\eta^{\mu\nu}$ が使えるものと仮定した（本章の終わりまで，時空は平坦だとしている）．この式では，自然単位系を用いることを想定して式全体に掛かる $\hbar c$ を省略しているが，物理定数について議論する際には，話をわかりやすくするために，$\hbar$ や c を復活させる．

ラグランジアン密度 (9.1) から（第 4 章 (4.13) 式に従って）導かれるラグランジュ方程式は，次の形になる．

$$-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -U'(\phi) - g^2\phi A^2 \tag{9.2}$$

$$-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu A = -g^2\phi^2 A \tag{9.3}$$

こうした非線形な方程式を近似的に解く際に用いられるのが，摂動論である．一般的な摂動論では，ϕ と A の値は小さいと仮定して，(9.2)，(9.3) 式右辺に現れる 2 次以上の項をゼロと置いてしまう．この近似では，A はダランベール演算子

$$-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

を作用させたときにゼロになるので，光速で伝播する波動解が存在する．場を量子化した場合には，量子揺らぎによって粒子的な状態（= 素粒子）が現れるが，この素粒子も光速で運動することになり，質量はゼロでなければならない．この波動解を最低次の近似として，逐次的に右辺の効果を取り入れていくのが摂動論である．

ところが，ポテンシャル $U(\phi)$ が $\phi = \phi_0\,(\neq 0)$ で最小値（一般には極小値）を取る場合は，$\phi = 0$ の周りで摂動論を考えるのは不適切である．(9.2) 式右辺の $g^2\phi A^2$ をゼロと置いたときの解は，$\phi = 0$ ではなく $\phi = \phi_0$ なので，摂動論の最低次の近似で A が満たす方程式は，

$$\left(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + g^2\phi_0^2\right)A = \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g^2\phi_0^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}A = 0 \qquad (9.4)$$

となる．時間・空間に対する依存性を $\exp(-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ とすると，方程式 (9.4) が満たされるという条件から，ω と $\boldsymbol{k}$ の間の分散関係は，

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + g^2\phi_0^2 + \boldsymbol{k}^2 = 0$$

で与えられる．量子化したときに現れる素粒子のエネルギー E および運動量 $\boldsymbol{p}$ は，アインシュタイン－ド・ブロイの関係式を通じて ω および $\boldsymbol{k}$ と結びつけられる一方で，質量を m としたときの相対論的な関係式

$$-E^2 + m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2 = 0$$

を満たさなければならない．これより，素粒子の質量 m が，次式で与えられる．

$$m = \frac{\hbar g}{c}\,|\phi_0| \qquad (9.5)$$

この式は，スカラー場 ϕ が凝縮したことによって，場 A で記述される素粒子が質量を獲得したことを表す．素粒子の標準模型でも，スカラー場の一種であるヒッグス場の凝縮によって，電子やクォークなどが質量を獲得している．

　ここで示した摂動論の方法は，量子化された場を扱うには不充分である．場を量子化したときに現れる量子揺らぎのせいで，方程式に含まれる定数は全て量子補正を受けるため，すぐ後で述べる繰り込みの処方箋が必要となるからである．

標準模型には，スカラー場としてヒッグス場が 1 つしか含まれておらず，ポテンシャルの最小値も 1 つに限られることが多い．このため，凝縮したヒッグス場の値は理論から一意的に定まり，その結果として他の場が獲得する質量の値も（(9.5) 式と同じよう

に）決定される．しかし，現実の世界には，標準模型とは異なって数多くのスカラー場（あるいは，近似的にスカラー場として記述することができる何か）があり，ただ 1 つの最小値ではなく，いくつもの極小値が存在すると推測される．そのように推測される根拠はいくつかあるが，その 1 つは，9-4 節で述べる対称性の破れのパターンが何通りも考えられることである．仮にこの推測が正しいとすると，カオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論で想定されている数多くのユニバースごとに凝縮するスカラー場の値が異なっており，素粒子の質量が異なる世界が生まれていることになる．

凝縮するスカラー場の値は，(9.5) 式のように素粒子の質量を直接与えるが，それとともに，**繰り込み**を通じて他の物理定数にも影響を及ぼす．

繰り込みとは，量子揺らぎによって生じる計算不能な影響を，いくつかのパラメータに（文字通り）繰り込んでしまうという手法である．例えば，ミリカンの油滴実験で電子の電荷を測定する場合を考えよう．量子電磁気学によれば，電子場も電磁場も量子論的に揺らいでおり，それぞれの量子揺らぎが相手の場を変動させるという複雑な相互作用をしている．こうした相互作用の効果を全て理論的に計算することはできない．しかし，油滴実験で測定される電荷の値には，実験の過程で電子の周囲に生じるさまざまな相互作用の効果が含まれているはずである．素朴な言い方をすると，量子揺らぎを介して周囲の場をひきずったり乱したりする効果を全てひっくるめた結果として，電荷が測定されるのである．質量の測定でも同様である．このように，相互作用の効果が含まれた測定値が，“繰り込まれた”電荷や質量の値である．繰り込み理論とは，“繰り込まれた”定数を使うことで，本来は計算できないはずの相互作用の効果まで摂動論計算に取り込む手法である．

> 繰り込み理論の具体的な計算法は，大学院レベルの量子場理論の教科書に必ず書かれているので，それらを参照していただきたい．日本語で読める教科書には，ワインバーグ著『場の量子論』 (吉岡書店) などがある．

スカラー場が凝縮している場合，他の場は，周囲に瀰漫（びまん）しているスカラー場と相互作用しながら揺らぐことになるため，繰り込まれた物理定数には，スカラー場からの寄与が含まれる．もともとの理論式に含まれる“裸”の定数（(9.1) 式のラグランジアン密度における g など）がユニバースの状態と無関係であっても，測定が可能になる繰り込まれた値は，スカラー場がどのように凝縮するかに依存しており，ユニバースごとに異なっていてもおかしくない．

理論物理学の基礎的な定数としては，電子の電荷 $-e$ よりも，次式で定義される微細構造定数 α の方が良く使われる．

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.036\cdots$$

かつては，この値が理論的に導けないかと検討されたこともあり，20 世紀中葉の理論物理学者にとって，137 は常に気に掛かる数字だった．だが，実は α は繰り込まれた定数であり，スカラー場の凝縮の仕方という偶然的な要素に依存するので，現在では，理論的に導くのは困難だと考えられている．

スカラー場の凝縮がユニバースごとに違うとなると，物理定数の分類は，次のように書き換えねばならないだろう．

①′ **定義数／換算定数．** これらは，適切な単位系を選ぶことにより，理論から消去することができる．

②′ **ユニバースの状態に依存する定数．** 電子の電荷や質量などの繰り込まれた値は，このタイプの定数である．

③′ **マルチバーサルな定数．** (9.1) 式の g のような結合定数（繰り込まれていない“裸”の結合定数）がそうだと推測されるが，はっきりわかってはいない．

実は，その地位をきちんと述べなければならない定数が，もう 1 つある．それが，万有引力定数 G，あるいは，第 7 章 (7.12) 式で示したように，G と $\hbar$ および c の組み合わせとして定義されるプランク長 l_P である．

プランク長を 1 と置く単位系を使うと，全ての物理量は無次元となり，物理法則を表す式は単純化される．しかし，時間と空間の同質性に基づいて $c = 1$ と置くべきだと要請されるのとは異なり，$l_P = 1$ とすることに物理的な根拠がある訳ではない．第 7 章で紹介したループ量子重力理論や力学的単体分割理論では，プランク長の付近で物理的な性質が大きく変わることが示されるので，プランク長は単なる定義数や換算定数ではなく，物理的に意味のある定数と考えるべきだろう．このことは，アボガドロ定数と比較するとわかりやすいだろう．アボガドロ定数を 1 と置くと，分子数をモルで表す単位系になるが，1 モルを境に物理的・化学的性質が変化することはない．プランク長を単位として長さを表す単位系で，1 プランク長を境に物理的性質が大きく変わるのとは対照的である．

一部の物理学者は，プランク長が唯一の「単位を持つマルチバーサルな物理定数」だと考えている．この考えが正しいかどうかは，今の時点では何とも言えないが，少なくとも，プランク長以外にこうした定数の候補が見あたらないことも確かである．

9-4 節　空間反転および粒子／反粒子の対称性の破れ

すでに述べたように，素粒子の標準模型にはスカラー場はヒッグス場 1 つしか含まれておらず，その最小値も 1 つだと仮定されている．にもかかわらず，多くの物理定数がユニバースごとに違っていると考えられるのは，スカラー場の凝縮の仕方は何通りもあること示唆する状況証拠があるからだ．それが，不自然に思える形で対称性が破れていることである．

標準模型ではゲージ対称性の破れが最も重要だが，話が少し難しくなるので，まず，比較的わかりやすい左右の対称性から話を始めよう．

誰でも容易に右と左を区別できるが，自分たちの置かれている状況に言及しないで「どちらが右側か」を指定するのは，多くの人の予想に反してひどく難しい．「大多数の人の身体で肝臓のある側」「北を向いたときに太陽が昇る側」といった定義は，人類にしか通用しない．遥か彼方の銀河に住む知的生命体と交信を行っている際に，文字だけで「どちらが右側か」を伝えるには，普遍的な物理法則を利用しなければならないが，これが難問である．

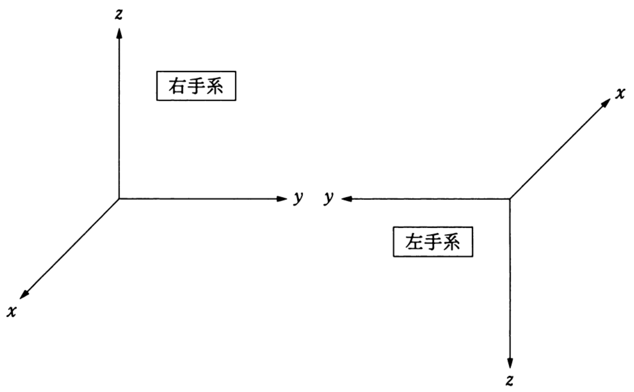


図 9-1　右手系と左手系

「フレミングの左手の法則」があるのだから，電荷に加わる力と磁場の向きから左右の区別ができると思われるかもしれないが，それは誤りである．なぜなら，磁場を決める際に利用されるベクトルの外積は，「x 軸向きのベクトルに y 軸向きのベクトルを掛ける

と z 軸の向きになる」という形で向きを定義しているので，座標系として右手系と（座標軸を反転させた）左手系のどちらを選ぶかによって向きが逆になるからである．通常の電磁気学では，右手系で外積の向きを定義するが，「どちらが右側か」という知識を前提としないで右手系と左手系を区別することはできない．

電磁気的な現象によって左右を区別できないのは，マクスウェル電磁気学が右手系と左手系の入れ替え——あるいは空間座標の反転——に対して不変だからである．マクスウェル電磁気学のラグランジアン密度は，ベクトルポテンシャル A_μ を用いると，(9.6)式のように表される（添字の上げ下げは，ミンコフスキ計量 $\eta^{\mu\nu}$ を使って

$$A^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} A_\nu$$

のように行っているので，第0成分だけが符号を変える）．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + j_\mu A^\mu \tag{9.6}$$

j_μ は4成分を持つ4元電流である．電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ は，A_μ を使って表すことができる．

$$E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \quad B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$$

3つの空間座標を反転させると，ラグランジアン密度に現れるそれぞれの量は，次のように変換される．

$$x^0 \to x^0, \quad A_0 \to A_0, \quad j_0 \to j_0$$
$$x^i \to -x^i, \quad A_i \to -A_i, \quad j_i \to -j_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

空間座標の反転によって，ラグランジアン密度の値が変わらないことは，直ちに確かめられる（電場 $\boldsymbol{E}$ は符号を変え，磁場 $\boldsymbol{B}$ は変えないこともすぐにわかる）．どのような物理法則が成り立つかは，ラグランジアン密度を積分した作用 S の値によって決まるので，空間座標を反転しても電磁気的な法則は変わらないことになる．つまり，電磁気で右と左を区別することはできないのである．

空間反転に対してラグランジアン密度が不変になるのは，ごく自然な性質のように見える．このため，右と左の区別は普遍的なものではなく，臓器の配置や地球の自転の向きといった偶然的な要因に基づいて指定するしかないと結論したくなるだろう．実際，20世紀半ばまで，多くの物理学者がそう信じていた．ところが，自然界には，右と左を区別する相互作用が存在していたのである．それが，ベータ崩壊のような**弱い相互作**

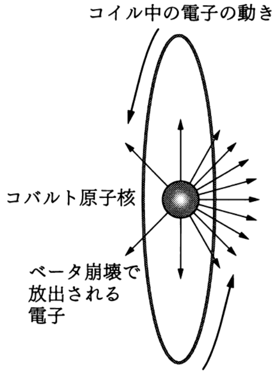


図 9-2　ベータ崩壊における左右対称性の破れ

用である．ベータ崩壊が右と左を区別することは，1957 年にリーとヤンによって示された．

電流を流しているコイルの中央付近に標準的なベータ線源である放射性コバルトを置くと，ベータ崩壊を起こして電子を放出する．このとき，右と左の対称性（空間反転の対称性）が破れているため，電子が飛び出す方向に偏りが生じる．この現象を利用して，次のように右手系を定義することができる：①ある時刻におけるコイル内部での電子の運動方向を，x 軸の向きに選ぶ．② x 軸の向きを定義した位置から 1/4 周だけ進んだときの電子の運動方向を，y 軸の向きに選ぶ．③このセットアップで実験を行ったとき，ベータ崩壊で放出される電子がより多く飛び出す側を，右手系における z 軸の向きとする．

これまでの観測データによると，遠方の天体においても，地球周辺と同じように物質は陽子・中性子・電子から構成されていることが確実であり，電子やコバルトが何かについては，遠い銀河の異星人との間にも共通の理解が成立する．したがって，文字による交信しかできない場合でも，ベータ崩壊を利用すれば「どちらが右側か」を教えることが可能になる．

空間反転の対称性と同じように，成り立っている方が自然に思われるにもかかわらず破れている対称性として知られているのが，粒子／反粒子の対称性である．量子場理論によると，フェルミ粒子と呼ばれるタイプの素粒子（電子・クォーク・ニュートリノなど）には，必ず粒子と反粒子が存在する（ボース粒子の場合は，光子のように粒子／反

粒子の区別がないものもある)．粒子と反粒子は，質量やスピン（素粒子が持つ磁気モーメントの大きさ）が等しく，電荷の符号が互いに逆になる素粒子で，空間にエネルギーを注入するとペアで生成されたり，逆にペアで消滅してエネルギーを作り出したりする．全ての粒子を反粒子に，反粒子を粒子に置き換えても，物理法則に違いが見られないというのが，粒子／反粒子の対称性である（この置き換えによって物質を構成する素粒子の電荷が逆になるので，電場の向きなども反転する)．式の上では，反粒子は，あたかも粒子が時間を逆行しているかのように記述されるので，この対称性は，時間反転の対称性と見なすこともできる（物理学的には，**CP対称性**という用語が使われる)．

粒子と反粒子は，電荷の符号などが逆になる他は，力を伝える素粒子（光子やグルーオンなど）との反応がそっくりなので，両者を置き換えても何の違いも生じないのが自然に思えるが，実はそうではない．このユニバースでは，粒子と反粒子の間にはわずかな差異があることが知られている．

ビッグバンから間もない頃には，莫大な熱エネルギーによって粒子と反粒子のペアが大量に生み出されており，素粒子のスープのようになっていた．ところが，このとき粒子と反粒子のバランスが崩れており，粒子の方が（反粒子100億個に対して粒子100億1個というように）ほんのわずかだけ多くなっていた．空間が膨張して温度が下がっていくと，粒子・反粒子のペアが対消滅を起こしてどんどん消えていくが，最終的には，わずかに多く存在している粒子の方が，対消滅するペアを見つけられずに残ってしまう．こうして残った粒子が集まって天体を形成していったと考えられる．粒子・反粒子の非対称性があったからこそ，生命が発生し人類が誕生した訳である．

われわれの住むユニバースで，空間反転の対称性（左右の対称性）と粒子／反粒子の対称性が破れていることははっきりしているが，どのようなメカニズムによって破れたのかは，まだわかっていない．素粒子の標準模型は，これらの対称性が初めからないような形で定式化されており，何らかのメカニズムによって対称性が破れたのか，あるいは，自然界にはそもそも対称性がないのか，何の説明もされていない．しかし，多くの物理学者は，標準模型で採用されているゲージ対称性の破れと似たメカニズムによって，空間反転や粒子／反粒子の対称性が破れたのではないかと推測している．

標準模型におけるゲージ対称性の破れは，スカラー場の凝縮によって生じるとされており，ユニバースごとに異なった破れ方をする可能性が高い．そこで，次の9-5節では，そのメカニズムであるヒッグス機構を見ることにしよう．

9-5 節　ゲージ対称性の破れとヒッグス機構

素粒子の標準模型には，ゲージ対称性と呼ばれる対称性が仮定されている．空間反転や粒子／反粒子の対称性とは異なり，ゲージ対称性では，連続的な変換に対して不変性が保たれる．まず，簡単な例として，φ_1, φ_2 という 2 つのスカラー場が，次のラグランジアン密度で表される相互作用をする場合を考えよう．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2\right) - U\left(\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}\right) \tag{9.7}$$

この式のままでは，対称性がわかりにくいので，

$$\xi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\varphi_2 / \varphi_1\right)$$

と置いて，(9.7) 式のラグランジアン密度を書き換えることにする．このとき，絶対値が ξ，偏角が θ となるような複素数 ϕ を使うと，

$$\left(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2\right) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\varphi_1 - i\varphi_2\right) \partial_\nu \left(\varphi_1 + i\varphi_2\right) = \partial_\mu \left(\xi e^{-i\theta}\right) \partial^\mu \left(\xi e^{i\theta}\right)$$

となるので，書き換えが簡単にでき，(9.7) 式のラグランジアン密度は次のようになる．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \left(\xi e^{-i\theta}\right) \partial^\mu \left(\xi e^{i\theta}\right) - U(\xi) = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - U(|\phi|) \tag{9.8}$$

ただし，

$$\phi = \varphi_1 + i\varphi_2, \qquad \phi^\dagger = \varphi_1 - i\varphi_2$$

である（† は，ϕ を演算子と見なしてエルミート共役を取ることを表すが，演算子に関する予備知識のない読者は，単なる複素共役と考えてかまわない）．

(9.8) 式を見れば直ちにわかるように，χ_0 が場所に依存しない定数であるとき，

$$\theta \to \theta + g\chi_0 \tag{9.9}$$

という置き換えをしてもラグランジアン密度は変わらず，物理法則に違いはない（g は，今の段階では意味のない定数である）．(9.9) 式のような変換がゲージ変換の一種であり，「ゲージ対称性がある」とは，このような変換をしてもラグランジアン密度が変わらず，同じ物理法則が成り立つことを意味する．(9.9) 式のゲージ変換は，複素変数 ϕ の

位相を変えることに相当し，数学的には1次のユニタリ変換 U(1) になる．

ビッグバン直後のような高温状態では場は大きく揺らいでいるが，温度が下がってくると，場はポテンシャルの最小値に落ち着くことになる．このとき，ポテンシャルの形によっては，ゲージ対称性が破れることも起こり得る．

ゲージ対称性を破る簡単な例として，次のポテンシャルを考えることにしよう（現実のポテンシャルがどのような形になるかわからないため，専門家も，やむを得ずこのようなポテンシャルを仮定して計算を進めることが多い）．

$$U(|\phi|) = U_0 - \frac{1}{2}\mu^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4}b|\phi|^4 \qquad (\mu, b > 0) \tag{9.10}$$

ただし，U_0 は，暗黒エネルギーの観測値と矛盾しないようにポテンシャルの最小値を調節するための定数で，以下の議論では，ポテンシャルの最小値をゼロとしてある．マルチバースの暗黒エネルギーに関する議論は，第10章で取り上げる．

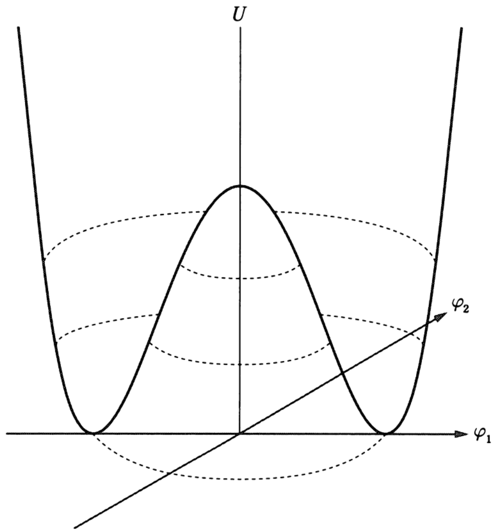


図 9-3　ゲージ対称性を破るポテンシャル

φ_1，φ_2 を座標として (9.10) 式のポテンシャルのグラフを描くと，図9-3のようになる．中心軸の周りに回転させてもポテンシャルの形が変わらないことが，ポテンシャルのゲージ対称性を表している．しかし，温度が下がって，U が最小になるポテンシャル

の谷間のどこかで ϕ が凝縮すると，もはや回転しても同じとは言えなくなり，対称性が破れたことになる．これが，**対称性の自発的な破れ**と呼ばれる現象である（「自発的」とは，外部からの作用によって強制的に破られるのではないことを意味する）．

ϕ が凝縮するときの θ の値は決まらないが，(9.9) 式の χ_0 を調節することで $\theta = 0$ と置くことにしよう．$|\phi|$ の値は，$U' = 0$ という条件から定まる．

$$U'(|\phi|) = -\mu^2 |\phi| + b|\phi|^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\phi| = \frac{\mu}{\sqrt{b}} \equiv \Xi$$

このような凝縮が起こった後での場の変動は，凝縮した値 $\xi = \Xi$，$\theta = 0$ の周りの揺らぎとなる．そこで，ラグランジアン密度 (9.8) を，$\xi - \Xi$ と θ の 2 次まで展開したものを求めてみよう．

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{2}\partial_\mu(\xi - \Xi)\partial^\mu(\xi - \Xi) - \mu^2(\xi - \Xi)^2 - \frac{1}{2}\Xi^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta$$

この式からわかるように，$\xi - \Xi$ という場が質量 $\sqrt{2}\mu$ の素粒子として振舞うのに対して，θ は質量ゼロの素粒子となる．(9.10) 式のポテンシャルは θ に依存せず，$\theta = 0$ に引き戻そうとする復元力が働かないため，θ には質量項が現れないのである．

ここで，ちょっとした問題が生じる．現実の世界では，質量ゼロの素粒子は，光子以外には観測されていないのである（クォーク間の力を媒介するグルーオンは，理論的には質量ゼロだが，陽子や中性子などの内部に閉じ込められていて観測できず，ニュートリノは，きわめて小さいものの質量があることが判明している）．スカラー場が質量ゼロの素粒子として振舞うのは，どうにも都合が悪い．

実は，連続的な変換に対する対称性が自発的に破れた場合，質量ゼロの素粒子が必然的に現れることが証明されている．この素粒子は，理論の提唱者の名前を取って，南部－ゴールドストーン粒子と呼ばれる（最初に理論を考案したのは南部で，ポスドクのヨナラシーニオとともに 1961 年に論文にしたが，あまりに難解でほとんど理解されず，ゴールドストーンがスカラー場を用いたわかりやすい論文を書いて，初めて学界で認知されたという経緯がある）．南部－ゴールドストーン粒子が現れないようにするメカニズムとして，ヒッグスらによって考案されたのが，ヒッグス機構である．これは，スカラー場の他にゲージ対称性を持つベクトル場を導入することで，南部－ゴールドストーン粒子となるはずの場を質量のあるベクトル場の 1 成分に見せかけてしまうというものである．

ヒッグス機構の議論は少し難しくなるので，ここでは，ごくかいつまんで解説するにとどめよう．まず，電磁場と同じ形の相互作用をするベクトル場 A_μ を導入し，(9.8) 式のラグランジアン密度に A_μ の項を加えたものを考える．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\phi^\dagger\left(\partial^\mu - igA^\mu\right)\phi - U\left(|\phi|\right) \quad (9.11)$$
$$\left(\phi = \xi e^{i\theta}, \quad \phi^\dagger = \xi e^{-i\theta}\right)$$

(9.11) 式は，凝縮するスカラー場と別の場が相互作用しているという点で (9.1) 式のラグランジアン密度と似た形をしているが，局所的なゲージ対称性を持つという重要な相違がある．

場所に依存する任意の微分可能な関数を χ とし，χ を微分したものをベクトル場 A_μ に加える変換を考えてみよう．

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (9.12)$$

このとき，(9.11) 式の第 1 項が不変に保たれることは，直ちにわかる．第 2 項は，この変換に対しては不変ではない．しかし，(9.12) 式の変換に加えて，

$$\theta \to \theta + g\chi \quad (9.13)$$

という変換を行い，

$$\left(\partial^\mu - ig\left(A^\mu + \partial^\mu \chi\right)\right)\left(\xi e^{i\theta + ig\chi}\right) = e^{ig\chi}\left(\partial^\mu - igA^\mu\right)\left(\xi e^{i\theta}\right)$$

のような関係式を使うと，第 2 項も変わらないことが示される．結局，(9.12) 式と (9.13) 式をあわせた変換に対して，ラグランジアン密度 (9.11) は不変になる．

(9.13) 式は (9.9) 式と良く似ているが，(9.9) 式の変換が場所によらない定数だけの変換なのに対して，(9.13) 式は，場所によって変換の仕方が異なっている．場所ごとに違うゲージ変換をするという意味で，(9.12) 式と (9.13) 式をあわせた変換は，局所ゲージ変換と呼ばれる．ラグランジアン密度 (9.11) は，局所ゲージ変換に対して不変であり，局所ゲージ対称性を持っている．局所的な対称性が現れたのは，場所によって ϕ の位相を変えたときに生じる変化分を，A_μ のゲージ変換によって吸収できるからである．こうした性質から，A_μ はゲージ場と呼ばれる．また，スカラー場（あるいはそれ以外の物質の場）の位相の変化を吸収する性質を持つ微分演算子

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$$

は，ゲージ変換における共変微分である．

それでは，スカラー場（ヒッグス場）の凝縮によって，局所ゲージ対称性が破られると，何が起きるだろうか？ ここでも (9.10) 式のポテンシャルを仮定し，スカラー場は

$|\phi|\,(=\xi)=\Xi$, $\theta=0$ に凝縮するものとしよう．このとき，局所的なゲージ対称性のない (9.8) 式のラグランジアンでは，θ が質量ゼロの素粒子として振舞うことが問題だった．

ヒッグス機構は，ゲージ場の中に θ を吸収することによって，質量ゼロの素粒子が現れるのを防ぐ方法である．まず，(9.13) 式で

$$\chi=-\theta/g$$

と置いて，θ が恒等的にゼロになるようにしてしまおう．このとき，ゲージ場は，(9.12) 式に従って

$$A_\mu \to A_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta\equiv B_\mu \tag{9.14}$$

と変換される．新たなゲージ場 B_μ を使って (9.11) 式のラグランジアン密度を書き直すことにしよう．(9.14) 式の変換はゲージ変換の一種なので，式の形は変わらず，A_μ を B_μ に，θ をゼロに書き換えるだけで良い．共変微分を展開して書き直せば，次式を得る．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu\right)\left(\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu\right)-\frac{1}{2}g^2B_\mu B^\mu\xi^2-\frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi-U\left(\xi\right)$$

ここで，スカラー場 ξ が，ポテンシャル U が最小値を取る値 Ξ に凝縮したとしよう．凝縮した値の周りのスカラー場 $\xi-\Xi$ とゲージ場 B_μ にどのような波動が生じるかを調べるために，場の量の 2 次までを取る近似でラグランジアン密度を書き換える．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\approx&-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu\right)\left(\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu\right)-\frac{1}{2}g^2B_\mu B^\mu\Xi^2\\&-\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\xi-\Xi\right)\partial^\mu\left(\xi-\Xi\right)-\mu^2\left(\xi-\Xi\right)^2\end{aligned}$$

$B_\mu B^\mu$ に比例する質量項が現れるので，ゲージ場 B_μ は質量を持つベクトル場になり，質量ゼロの場は含まれない．それでは，θ はどこに消えたのか？

鍵となるのは，ベクトル場において実際に伝播する成分の数である．電磁場はベクトル場なので形式的に 4 成分があるように見えるが，実際に伝播するのは，進行方向に対して垂直に偏光した横波の 2 成分だけである．これは，ゲージ変換の自由度があるために，4 成分全てが物理的に意味のある成分ではないことを表している．一般的なゲージ場も電磁場と同じで，質量がゼロでゲージ変換の自由度があるときには，横波の 2 成分しかない．ところが，(9.14) 式で定義した B_μ は，θ が恒等的にゼロになるという条件に縛られているので，ゲージが固定され，ゲージ変換の自由度はない．その代わり，もともとの A_μ の 2 つの自由度に加えて，伝播する成分が 1 つ増えて 3 つになっている．ヒッグス機構では，スカラー場（ヒッグス場）の位相 θ がゲージ場の 3 番目の成分の

“振り” をしており，ゲージ場とともに質量を獲得することで，質量のない南部－ゴールドストーン粒子が現れることを回避する．

9-6 節　標準模型における対称性

素粒子の標準模型は，局所的なゲージ対称性がヒッグス機構によって破られる理論である．標準模型で採用されるゲージ対称性は，ゲージ変換が，(9.12) 式・(9.13) 式のように単一の関数 χ で表される U(1) だけではなく，（各項が関数の）行列で表される非可換ゲージ変換――数学の用語を使うと，次数が 3 および 2 の特殊ユニタリ変換 SU(3) と SU(2)――になる．これらをあわせて，標準模型のゲージ対称性は，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と表される．標準模型では，この対称性を持つゲージ場を介して，6 種類のクォークと 6 種類のレプトン（電子・ミュー粒子・タウ粒子という 3 種類の荷電レプトンと，それぞれの荷電レプトンと対になる中性のニュートリノ）が相互作用する．

標準模型のゲージ対称性のうち，SU(3) は，クォークを結合させて陽子や中性子を作る相互作用の対称性である．この SU(3) 対称性は破れておらず，ゲージ場の素粒子（グルーオン）は質量を持っていないが，陽子や中性子の内部に閉じ込められており，外部に飛び出してくることはない．

一方，$SU(2) \times U(1)$ という対称性は，ヒッグス場の凝縮によって破られる．SU(2) のゲージ場は 3 種類，U(1) のゲージ場は 1 種類の素粒子を生み出す（それぞれ，2 つの偏光成分を持っている）．ところが，4 成分あるヒッグス場のうち 3 つがヒッグス機構によってゲージ場に吸収されるため，結局，質量のあるゲージ場の素粒子が 3 種類（電荷が正と負の W 粒子，電荷のない Z 粒子），質量のないゲージ場の素粒子が 1 種類（光子），質量のあるヒッグス場の粒子が 1 種類（ヒッグス粒子）となる．このうち，W 粒子と Z 粒子は 1983 年に存在が確認されたが，ヒッグス粒子はなかなか見つからず，2012 年になってようやく発見された（本書執筆時点では，発見されたのが標準模型のヒッグス粒子そのものかどうかは，まだ確認されていない）．

標準模型は，多くの素粒子現象を正確に記述するが，完全ではない．まず，標準模型では，ニュートリノには質量がないとされるが，現在では，小さいながらも質量があることが判明している．また，標準模型は，空間反転や時間反転（粒子／反粒子の置き換え）に対して非対称な形で定式化されているが，こうした非対称性が自然なあり方だというのは，必ずしも受け容れられるものではない．

そこで，多くの物理学者は，もともとの相互作用は標準模型よりも大きな対称性を持っており，それが段階的に破れていって，最後まで残ったのが $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

ではないかと考えている．こうした理論は，1970 年代後半に，まず大統一理論として提唱された．

例えば，SU(5) というゲージ対称性に基づく最もシンプルな大統一理論では，(5 という数が 3 + 2 に等しいことから窺えるように）SU(5) の対称性が部分的に壊れて SU(3) × SU(2) × U(1) になったとされる．このアイデアが正しいとすると，偶然の要因が世界のあり方に決定的な影響を及ぼしたことになる．われわれの住む宇宙では，電磁気力と比べて核力の方が遥かに強い．強い核力によって原子核が堅く結合されているので，生物が存在する惑星上の環境で元素変換は滅多に起きず，外殻電子のやりとりによって生じる化学反応によって物質的な変化が進行する．ところが，電磁気力と核力の力の差は，SU(5) の対称性が壊れたことに起因しており，この対称性が保たれたままの場合は，電磁気力と核力が同じ強さになる．この場合，安定した元素は存在せず，生命は発生できない．また，SU(3) × SU(2) × U(1) とは異なったゲージ対称性の組み合わせに壊れた場合にも，物質の振舞いは標準模型とは大きく変わる．「安定した元素の化学変化によって作られる物質世界」という状況は，温度が下がるときにスカラー場がどのように凝縮するかという偶然の積み重ねの中で生み出されたものである．

残念ながら，SU(5) のようなシンプルなゲージ対称性を仮定する初期の大統一理論は，その後の実験・観測データによって，ほぼ否定されてしまう．現在では，ゲージ対称性とは別の対称性（超対称性など）を含めた新たな統一理論が模索されている段階であり，最終的にどのような理論が認められるか（あるいは，人類は遂に究極の理論を見いだせないまま終わるか)，予想は難しい．しかし，標準模型の根底には，それよりも大きな対称性を持つ理論があるという基本的な見通しは，かなり確からしいと言って良いのではないか．

仮にカオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論が正しいとするならば，ビッグバンに始まるユニバースがいくつも誕生することになる．それぞれのユニバースの内部で，スカラー場の凝縮の仕方が異なっていると，それに応じて，さまざまな物理定数を持つ世界が形作られていく．こうした数多くのユニバースの中で，われわれのユニバースがどのような地位にあるかは次の第 10 章で見ていくことにして，本章の終わりに，並行宇宙のもう 1 つの可能性として，地平線の向こう側に拡がる領域について考えることにしよう．

9-7 節　地平線の向こう側

膨張する宇宙空間において，観測可能な範囲の限界が情報の地平線だが，そこで宇

宙空間が終わるわけではなく，観測不可能な領域にも広大な空間が拡がっているはずである．それでは，地平線の向こう側には，どれくらいの拡がりがあるのだろうか？WMAP による宇宙背景放射のデータには，空間の拡がりが有限であることを示す証拠はない．しかし，このことが直ちに宇宙空間の無限性を結論づける訳ではない．宇宙原理がほぼ成り立つという強い仮定を置いた上で，地平線の向こう側について推測することは可能である．だが，こうした手法は，地平線の手前で得た知識を向こう側に外挿することであり，有限の領域での知識を無限の彼方にまで外挿することは，控えめに言っても確実性に欠ける．現時点で言えるのは，宇宙空間は，地平線の向こう側で，ハッブル距離よりも遥か巨大な拡がりを持っているということだけである．

興味深いことに，カオス的インフレーションが永久に続くという理論を採用すると，ビッグバンに始まるユニバースの空間的な拡がりは無限大と見なせる．この理論でのユニバースは，マザーユニバース内部に生まれた“泡”のようなものなので，無限の大きさを持つのは不思議に思えるだろう．この不思議な状況は，相対論における時間と空間が常識と異なっている結果である．

カオス的インフレーション理論におけるビッグバン・ユニバースの始まりは，マザーユニバースのある地点で，インフラトン場の値が低下してインフレーションが終了することである．このとき，スローロール近似が成り立たなくなるギリギリのところまで超光速での膨張が続くので，“泡”の境界も超光速で拡がっていく．ところが，相対論においては，過去／未来の区別が成り立つのは相互作用できる範囲に限られ，光でも到達できない領域（特殊相対論で言えば光円錐の外側）は過去でも未来でもなく，“同時”と見なしてもかまわない．したがって，カオス的インフレーションの場合，インフレーションが終了するのが全て同じ時刻になるような座標系を採用することができる．この座標系を使うと，「超光速でいつまでも拡がり続ける」ことが「同じ時刻にどこまでも拡がっている」という状況に読み替えられる．これが，マザーユニバースの一部分でしかないはずの“泡”が無限の大きさを持つ仕組みである．

ただし，この無限性は，「インフレーションの終了がいつまでも同じように続く」ことを前提として導かれたものであり，マザーユニバースの状態がいつまでも変わらないという「拡大された宇宙原理」に基づいていることを忘れてはならない．

地平線の向こう側がどこまでも拡がっているとすると，その中のどこかに，この地球と全く同じ惑星があり，そこに「もう 1 人の自分」がいるという考えもある．これは，非科学的な夢想ではなく，テグマークのような著名な物理学者も主張している（テグマーク「並行宇宙は実在する」（『日経サイエンス』2003 年 8 月号））．これも一種の並行宇宙と言えるが，果たして，この結論は正当なのだろうか？

宇宙が取り得る状態がどれだけかを見積もるために，宇宙空間に何個の粒子を詰め込

めるかを考えてみよう．テグマークは，粒子の大きさを 2×10^{-13} m，ハッブル距離はその 2×10^{39} 倍と置いた．したがって，ハッブル距離を 1 辺とする立方体の内側に詰め込める粒子の最大数は，およそ $8\times10^{117}\approx10^{118}$ 個になる．この個数を，粒子を配置することができる場所の総数と解釈し，それぞれの場所が粒子で占められているかどうかで量子状態を表すことにすると，可能な量子状態の総数は，2 の 10^{118} 乗となる．そこで，1 辺がハッブル距離の立方体宇宙を，この数だけ積み重ねると，1 つの方向に，およそ $(2\text{ の }10^{118}\text{乗})^{1/3}\approx 10$ の 10^{117}乗 個の宇宙を並べることになる．それぞれの量子状態の宇宙が等しい確率で存在するならば，ハッブル距離の 10 の 10^{117} 乗倍程度の距離の範囲内に，われわれが観測している宇宙と完全に等しい宇宙が存在し，そこに自分とそっくりな人間がいると期待できる――とテグマークは論じている．

この見積もりは，宇宙の量子状態の総数を過少評価しているようにも思われる．テグマークは，ビッグバンから数分が経過して温度が 1 億度まで低下したときの宇宙を想定し，宇宙空間に水素やヘリウムが配置される場合を考えたようだが，実際には，電磁場が電子の運動に影響を及ぼすので，粒子の配置だけではなく電磁場の強度のような連続量も考慮しなければならない．たとえ，1 個の原子の化学反応が異なっても，生命活動のように初期条件に敏感に依存する過程は全く違ったものになる．

粒子の配置ではなく，場が取り得る状態の総数を見積もれば，もう少し確からしさは増すだろう．多くの物理学者は，第 7 章 (7.12) 式で与えたプランク長 l_P が，物理的に区別可能な最小の拡がりだと推測している．この考えに基づいて，1 立方プランク長の空間の中で場が N 個の量子状態を取ることができるとすると，差し渡し L の宇宙空間で実現可能な量子状態の総数は，N の $(L/l_P)^3$ 乗となる．仮に $N=2$ とすると，差し渡しがハッブル距離程度の宇宙空間の量子状態は，2 の 10^{183} 乗に上る．

さらに，宇宙はビッグバンから一度も熱平衡状態にならずに不可逆変化を続けているので，各量子状態が等確率で実現されるという仮定は，かなり疑わしい．同じ宇宙が存在する確率は，遥かに小さくなるはずである．

もっとも，どんなに確率が小さくても，地平線の向こう側に無限の宇宙が拡がっているとすれば，どこかに同じ宇宙が存在することは避けられないという議論も成り立つだろう．量子状態の総数が有限であるならば，無限個のアンサンブルの中に同じ状態のものが含まれるのは必然である．だが，この議論の前提として，量子状態の計算がどの宇宙でも同じようにできることを受け容れなければならない．これは，宇宙原理（あるいは，もう少し条件を弱めた形のもの）が無限の範囲で成り立つことを認める立場である．その妥当性については，科学的に結論を出せる段階ではないので，読者自らが考えていただきたい．

第 10 章

マルチバースと人間原理

10-1 節　人間原理の考え方

カオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論は，物理定数の異なるユニバースが次々と生まれる可能性を示している．こうしたマルチバースの存在は，何らかの方法によって検証することが可能なのだろうか？ 直接的な観測が困難なことは言うまでもない．カオス的インフレーション理論の場合，ユニバース（“泡”）同士の間に挟まれた領域は超光速で膨張を続けているので，どのような手段をもってしても，他のユニバースと連絡を取ることはできない．エキピロティック宇宙論では，重力以外の相互作用は特定のユニバース（ブレイン）に閉じ込められているため，標準的な一般相対論からのずれを検出するなどの間接的な方法以外に，ブレインの外側を探ることは困難である．

それでは，マルチバースに関する議論は単なる思弁でしかないのかと言うと，そうとも限らない．次の譬(たと)え話を考えていただきたい．

仮に，太陽系を取り囲むように分厚いガス雲が存在し，遠方からの電磁波を全て遮断して太陽系外の観測が全くできないものとしよう．こうした状況下でも，物質に関する科学は充分に発展させられる．原子物理についての知見が成立した段階で，この地球に生きる人類は，自分たちの置かれた環境の異常さに気がついて愕然(がくぜん)とするだろう．

生命活動に当たって，液体の水はきわめて重要な役割を果たす．水分子は“く”の字形に折れ曲がっていて大きな電気双極子モーメントを持つため，溶質分子との水素結合を通じて複雑な構造を作り上げることができるからである．例えば，リン脂質分子は水素結合を作る親水基と作らない疎水基の双方を持つ両親媒性物質であるため，水溶液中で脂質二重層という膜構造を形成する．こうした膜構造に囲まれることによって，熱力学的に安定した生命体の存在が可能になった．また，巨大なタンパク質が立体構造を変

化させて生化学反応の調整を行う際にも，水素結合が関与する．

ところが，現在の太陽系で惑星表面に液体の水が大量に存在するのは，地球だけである．火星には流れる水がかつて存在していたことを示す痕跡があるものの，重力が小さいために大部分が失われ，現在では地中に氷として残存するにすぎない．惑星の素材となった原始太陽系円盤のガス雲にはかなり多くの水分子が含まれていたが，水星と金星では蒸発して太陽風で吹き飛ばされ，木星と土星では氷の塊として成長したものの，重力で引き寄せられたメタンに周囲を覆われてしまった．天王星と海王星にメタンの海はないが，太陽から遠いので氷結したままである．太陽からの距離と質量が絶妙なバランスを取っている地球だけが，液体の水から成る海を保持できたのである．

一方，太陽も，生命が進化するのにちょうど良い性質を備えている．ここで必要とされるのは，充分な寿命と適切なスペクトルである．

生物起源とされる有機物の痕跡から推定すると，地球上で生命が誕生したのは，35 億年以上前に遡る．その後，20 数億年前に真核生物（細胞核を持つ生物の総称で，真正細菌・古細菌とともに生物界を構成する）が，約 10 億年前に多細胞生物が登場，5 億数千万年前のカンブリア爆発で多様な体制を持つ動物群が一気に生まれた．生命は，地球が形成されてから数億年～10 数億年の時間を掛けてステップアップしていった訳である．太陽では，約 100 億年にわたって安定した水素の核融合が続くため，生命の進化に充分な時間的余裕がある．しかし，一般に質量が大きいほど恒星としての寿命は短く，太陽の数倍以上の質量を持つ青色巨星の寿命は 1 億年以下になるので，生命が発生したとしても動物まで進化することはないだろう．

質量が太陽の数分の 1 以下の赤色矮星（わいせい）は，数百億年以上の長寿命となる．だが，放射される光量が少ない上にスペクトルが長波長の側に偏っており，光合成に適した短波長の光が不足する．動物のように活発に動き回る生物が必要とするエネルギーは，太陽から多量の光を受ける地球でも，広範囲の植物を摂取しない限り得られない．赤色矮星の周囲では，独立栄養生物を食べて活動する従属栄養生物の進化が滞ると予想される．銀河では，小さくて形成されやすい赤色矮星が恒星の過半数を占めるが，その周囲に高度な文明が生まれるとは考えにくい（知性を持った植物のような，地球上とは全く異なる高等生物が進化する可能性もあるが）．

100 億年にわたって短波長光を放出し続ける太陽と，液体の水を大量に有する地球は，生命の進化にとって好適な条件を備えた特異な天体である．重力によるガスの凝集によってこうした天体が偶然に形成される確率がかなり低いことは，地球上とその周辺での現象をもとに作り上げた物質科学だけからも推測できるはずである．もし人類が太陽系外天体の存在を知らなかったとすると，なぜ自分たちの生まれた環境がこれほど特異なのか悩むだろう．そうした中で，想像力豊かな科学者は，こんなことを言い出すかも

しれない.「観測はできないけれども，宇宙には膨大な数の恒星と，その周りを回る惑星が存在している．その中に，たまたま生命の進化に好都合な条件の揃った惑星があり，知性を持った生物が誕生するに至った．それがこの地球なのだ」と．太陽と地球が人間の存在を可能にする特異な性質を持つという事実から，恒星系が無数に存在するという突飛な結論が合理的に導かれるのである．

この推論の出発点になるのは，人間が置かれているのが生命の進化に適した特異な環境だという前提である．この前提は，宇宙はどこでも同じような状態にあることを主張する「宇宙原理」とは正反対であり，しばしば「**人間原理**」と呼ばれる．

それでは，人間原理に基づく推論によって，マルチバースの存在を（検証とは言わないまでも）傍証することができるだろうか？ マルチバースの考え方によれば，質量や電荷のような物理定数は，ビッグバンに始まるユニバースごとに異なった値を取る可能性がある．もし，われわれの住むユニバースが，生命の進化に適した特異な物理定数の組み合わせを備えているとすると，他にも数多くのユニバースが存在すると考えるのが自然だろう．そこで問題とすべきは，マルチバースにおいて物理定数はどの程度のヴァリエーションが許されており，われわれのユニバースでは平均的な値から大きく隔たっているかどうかである．

実は，この問題に対する物理学者の見解は一致していない．一部の物理学者は，われわれのユニバースにおける物理定数の値はかなり特異で，生命が進化しない無数のユニバースの中の例外的存在だと主張するが，そう考えない人も多い．見解が分かれる理由は，基礎となるマルチバーサルな理論ができておらず，物理定数のヴァリエーションがどこまで許されるかわからないからである．

以下では，物理定数の値がわれわれのユニバースと異なる場合に何が起きるかを見ていく．マルチバース理論の当否を巡る議論に決着をつけることはできないが，この問題を考えるきっかけくらいにはなるだろう．

10-2 節　標準模型の物理定数

ビッグバンに始まるユニバースでは，空間が膨張し温度が低下する際に，スカラー場（あるいは，近似的にスカラー場で表される何か）が凝縮していく．この過程を通じて，もともとの相互作用が持っていた対称性――現時点でははっきりわかっていないが，おそらく，空間反転や粒子／反粒子の入れ替えに対する対称性を含む――が失われ，物理定数の値が変化した．複数のスカラー場のポテンシャルにいくつもの極小値がある場合，どの極小値に落ち着くかは偶然的な要因に左右されるので，物理定数の値はユニ

バースごとに異なると予想されるが，詳細はわかっていない．確実なのは，われわれのユニバースにおいて，こうした過程の最終段階が素粒子の標準模型によって記述されるという点だけである．

標準模型を超える理論はまだ完成していないので，マルチバースの中でどこまでヴァリエーションが許されているかを具体的に議論することは難しい．粒子／反粒子の対称性について考えてみよう．この対称性が完全に保たれている場合，ビッグバンの高温状態で対生成した粒子と反粒子は，いつまでも同じ数だけ存在するので，冷却するにつれて再び対消滅を起こし，ほとんどなくなってしまう．その結果，天体を形成するのに必要な物質が確保できず，生命の発生・進化は望めない．それでは，もともとの相互作用が粒子／反粒子の対称性を持っているとして，これがどの程度まで破れたら，天体が形成され生命の進化が可能になるのだろうか？　もし，平均的なケースでは生命は進化できず，われわれのユニバースでの破れ方がきわめて例外的だとすれば，マルチバース理論の傍証になるだろう．だが，残念ながら，この問いに答えられるほど具体性のある理論はできていない．

標準模型を超える確実な理論が存在しない以上，物理定数がわれわれのユニバースと異なる場合に何が起きるかは，標準模型に準拠して議論するしかない．ここでは，3 つのケースについて取り上げよう．

§10-2-1　QCD と電磁気力の結合定数

第 9 章 9-6 節でも述べたように，標準模型とは，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と表されるゲージ対称性がヒッグス機構によって破られ，核力をもたらす SU(3) と電磁気力の U(1) が残るというものである（物理学的には，標準模型の U(1) と電磁気の U(1) は別物であり，電磁気の方にダッシュを付けることもあるが，専門家以外にはあまり重要な論点ではないので，ここでは両者をあえて区別しない）．

核力をもたらす SU(3) の相互作用は，QCD（quantum chromodynamics; 量子色力学）と呼ばれる．QCD には，電磁気の電荷に相当するものが（SU(3) の 3 に対応して）3 種類あり，同じ絶対値を持つ正と負の電荷が一緒になると電気的に中性になるのと同じように，3 種類のものをうまく組み合わせると QCD の相互作用を受けない中性の状態になる．この性質が，赤・緑・青の 3 原色の光を混ぜ合わせると色のない状態になるのと似ているので，“色”力学とネーミングされた訳である．

QCD の相互作用は，通常の（クォークプラズマを作るほど高温・高圧でない）状態では，せいぜい 10^{-15} メートル程度の範囲に閉じ込められている．これは，“色”荷の異なるクォーク同士が引き合って，中性の状態を作ろうとするからである．通常の物質を構成するクォークには u クォークと d クォークがあるが，3 つのクォークが組み合わさ

れて“色”荷ゼロになったのが陽子（uud）や中性子（udd）のような核子，クォークと反クォークとで“色”荷ゼロになったのが中間子である．さらに，核子は中間子を介して核力を及ぼしあっており，この力で結合して原子核を形作る．核力は，QCD の相互作用が間接的に現れたものである．

QCD の相互作用が比較的狭い範囲に閉じ込められているのに対して，電磁気力は広い範囲に拡がることができる．宇宙空間では，物質の大半は電荷を帯びたプラズマとなっており，電場や磁場を介して相互作用を行っている．電子と原子核は結合して中性の原子を作る傾向にあるが，外殻の電子は移動しやすく，その結果として，さまざまな化学反応が引き起こされる．

われわれのユニバースで特徴的なのは，核力の方が電磁気力より遥かに強く，その結果として元素の安定性が高いという点である．生命活動にとって重要なのは，炭素・窒素・酸素など生体を構成する主要元素の安定性である．DNA やタンパク質は炭素原子がつながった炭素骨格によって支えられており，炭素原子が安定でなければ生命の存在は脅かされる．ところが，原子核の安定性は，われわれのユニバースにおいて核力と電磁気力の間に大きな差が存在するという事実に依存している．

原子核は陽子と中性子から構成されているが，陽子は正の電荷を持つため，原子核内部における陽子の個数（原子番号）が多くなるほど電気的な反発力が大きくなって，原子核は不安定になる．われわれのユニバースでは，核力が電磁気力よりも遥かに強いため，自発核分裂が起きるほど不安定になるのは，原子番号がかなり大きい場合に限られる（陽子が過剰な原子核では自発核分裂が起きやすいが，天然存在比の最も多い同位体が自発核分裂を起こすのは原子番号 92 のウランと 94 のプルトニウムのみ）．しかし，電磁気力の結合定数である素電荷 e の値が大きくなると，原子番号の小さい原子核も不安定になってくる．自発核分裂が起きやすくなるだけでなく，原子核内部からアルファ粒子が飛び出す際のポテンシャル障壁が小さくなるため，トンネル効果が起きやすくなってアルファ崩壊の確率も高くなる（第 6 章図 6-3 の井戸型ポテンシャルで，電荷 e が大きくなることによってクーロン力のポテンシャルと原子核内部のエネルギー E が同時に増える状況を考えていただきたい）．核力と電磁気力の強さが同程度になると，炭素原子が不安定になり，生命には適さない世界となる．

もし，核力と電磁気力の相対的な強さが全くの偶然で決まるとすれば，われわれのユニバースのように核力の方が遥かに強いという状況は，かなり稀（まれ）なケースだと考えられる．とすると，さまざまなユニバースが数多く存在しており，われわれが存在するのは生命の発生・進化に適した例外的なユニバースだというマルチバース理論がもっともらしく思えるかもしれない．

しかし，この主張には強力な反論が存在する．核力と電磁気力の相対的な強さは偶然

に決まるのではなく，もともとの相互作用の形式によって制限されており，核力が強くなるのはきわめて自然な結果だというものである．

このことを説明するには，核力の元になっている QCD の性質を明らかにする必要がある．QCD の相互作用を媒介するゲージ場（第 9 章 (9.11) 式における A_μ のようなベクトル場）は，電磁場（電磁気力のゲージ場）と異なり，自分自身と相互作用するという性質を持つ．電荷の周りの電磁場は球対称に拡がるため電荷から遠ざかるほど弱くなるが，QCD のゲージ場は，自身との相互作用を通じて自己増幅するので，ゲージ場の源である“色”荷から離れると逆に強くなる．この性質は，繰り込まれた結合定数を使うとわかりやすく表せる．繰り込みとは，ある範囲の相互作用の効果を電荷や質量の値に含ませることであり，QCD のような性質を持つゲージ場の結合定数は，繰り込みの範囲を長距離に広げるほど強くなる．標準模型に含まれる SU(2) の相互作用も，同じように長距離になるほど強い．しかし，U(1) は，逆に長距離では弱くなることが知られている．SU(3)，SU(2)，U(1) の結合定数が繰り込みの範囲を表すスケールによってどのように変わるかをグラフ（実験によって特定のスケールでの結合定数を測定し，理論的な計算によって異なるスケールでの値を求めたもの）で表すと，図 10-1 のようになる．

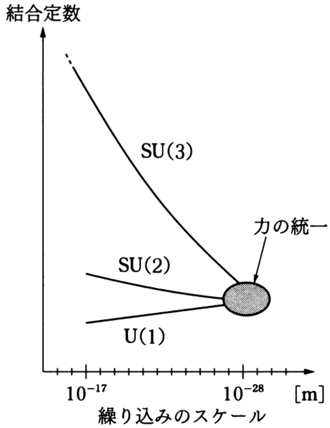


図 10-1　繰り込みのスケールによる結合定数の変化

ここで，3 種類の相互作用の繰り込まれた結合定数がほぼ 1 点で交わるように見えることに注意されたい（実際には，「ほぼ 1 点」どころではなく 2 桁ほどのずれがあるが，

何桁にもわたる定性的な振舞いを見ているので，この程度は小さなずれと見なして良い）．これは，結合定数のグラフが交わる付近で，3 種類の相互作用が 1 つに統一される可能性を示しているとも考えられる．統一された相互作用が標準模型の基盤となる理論であり，スカラー場の凝縮などによって統一的なゲージ対称性（第 9 章 9-6 節で述べた SU(5) はその 1 例）が壊され SU(3) × SU(2) × U(1) という標準模型の相互作用になったと考えることは，決して無理ではない．このアイデアが正しいとすると，3 つの結合定数の値がきわめて短距離になるスケールでほぼ一致するのは，偶然ではなく必然である．逆に言えば，長距離の範囲で考えたときに，SU(3) の結合定数は，必然的に U(1) の結合定数よりも遥かに大きくなる．このことは，核力が電磁気力よりも遥かに強い理由の説明となる．

統一理論の対称性がどのように破れるかが偶然に左右されることは，充分にあり得るだろう．しかし，最も単純な U(1) という群で表される相互作用が最後まで残ることは，かなり自然であるように思える．さらに，U(1) のゲージ相互作用以外に，非可換群（N 次の特殊ユニタリ群 SU(N) や N 次元の回転群 O(N) など）で表されるゲージ相互作用が残ったとすると，後者の相互作用は SU(3) と同じく，繰り込みを長距離の範囲に広げるほど結合定数が強くなり，有限の領域に閉じ込められるという性質を持つ．この場合にも，安定性の高い元素が形作られ，閉じ込められない U(1) の相互作用によって化学反応を起こすという状況が実現される．

人間原理に基づいてマルチバース理論の正当性を主張するためには，われわれのユニバースが例外的なものであることを示さなければならなかった．しかし，統一理論のアイデアが正しいとすれば，核力が電磁気力より遥かに強いことが特異なケースだとは言えず，ユニバースが数多く存在することの証拠にはならない．

§10-2-2 弱い相互作用のスケール

原子核内部には，核子を結合する核力の他，ベータ崩壊などを引き起こす相互作用が存在する．この 2 種類の力は強度が全く異なるため，当初は便宜的に「強い相互作用」「弱い相互作用」として区別されたが，他に良い呼び方が考案されなかったため，この味気ないネーミングが今に至るまで使い続けられることになった．「強い相互作用」が強いのは，（§10-2-1 で述べた統一理論のアイデアが正しいとすると）繰り込みの効果によって長距離で結合定数が大きくなるからだが，もう 1 つの「弱い相互作用」が弱いのは，対称性が破れるスケールに関係する．

弱い相互作用は，標準模型における SU(2) × U(1) のゲージ対称性がヒッグス機構で破れることによって生じる．対称性が破れる際，ゲージ場は凝縮したスカラー場の値に応じた質量を持つようになるが，このケースでは，$\pm e$ の電荷を持つ $\mathrm{W}^{\pm}$ 粒子

が $M_W = 80.4\,\mathrm{GeV}/c^2$（$1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-10}\,\mathrm{J}$），中性の Z 粒子が $M_Z = 91.2\,\mathrm{GeV}/c^2$ の質量を獲得する．これらの値から，凝縮したスカラー場の値は，エネルギーの単位で表して 100 GeV 程度のスケールになることがわかる．

弱い相互作用とは，$\mathrm{W}^{\pm}$ 粒子や Z 粒子に媒介される相互作用である．例えば，原子核のベータ崩壊は，中性子内部にある d クォークが W^- 粒子を放出して u クォークに変わり，W^- 粒子が電子と反ニュートリノに崩壊する過程である．W^- 粒子が介在することから，この素粒子反応が起きる確率振幅には，$1/M_W^2$ という因子が掛かる（正確に言えば，実際に掛かるのは W^- 粒子の伝播関数であり，やりとりされる運動量が小さいときに近似的に $1/M_W^2$ となる）．ところが，$M_W c^2$ という値は，原子核内部のエネルギーのスケール（約 1 GeV）に比べて巨大であるため，$1/M_W^2$ が抑制因子となってベータ崩壊の起きる確率が小さくなり，「弱い」相互作用となるのである．

弱い相互作用は，強い相互作用に比べると相対的に弱いが，充分に弱くないとも言える．弱い相互作用をもたらす対称性の破れは 100 GeV のスケールで起きる．ところが，§10-2-1 の統一理論のアイデアによると，もともとの相互作用が $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ に分かれる対称性の破れは，それよりも 11 桁以上大きなスケールで起きている．統一理論の破れが何らかの普遍的（マルチバーサル）な過程によって生じるのならば，ヒッグス機構による $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ の破れも同程度のスケールで起きるのが自然であり，われわれのユニバースはきわめて特異だという見方も成り立つ．そこで，$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ のゲージ対称性が破れるスケールが，われわれのユニバースよりもきわめて大きいときに何が起きるかを考えてみよう．このとき，$\mathrm{W}^{\pm}$ 粒子や Z 粒子の質量は非常に重くなるため，弱い相互作用は実質的に起きなくなる（ただし，クォークの質量についてはわからないことが多いので，われわれのユニバースと同じだと仮定する）．このようなユニバースが生命の存在に適さないとすると，人間原理の考え方に従って，マルチバース理論の信憑（しんぴょう）性が高まることになる．

弱い相互作用のないユニバースや，この後の節で述べるクォークの質量の異なるユニバースに関しては，A. ジェンキンス，G. ペレス著「別の宇宙にも生命は存在する!?」（『日経サイエンス』2010 年 4 月号）でわかりやすく解説されており，本書の記述も，この記事に基づいている．より本格的な論文は，巻末の参考文献を参照のこと．

われわれのユニバースと比べて，クォークの質量や QCD の結合定数などは等しく，弱い相互作用だけが存在しないユニバースは，次のような特徴を持つ．

(1) 安定な同位体が増える．　ベータ崩壊が起きないため，陽子と中性子の数がかなり異なった原子核も安定になる．われわれのユニバースで安定な水素の同位体は，原子核が陽子である通常の水素原子の他には重水素と三重水素だけだが，弱い相互作用がないと，原子核に中性子が5個含まれる六重水素まで存在できる．炭素原子は，中性子3個の炭素9から中性子10個の炭素16まで存在する．陽子の割合が過剰になると，陽子放出が生じて原子核が不安定になる．

(2) ビッグバンでの元素合成が異なる．　ビッグバン直後の高温状態の中で元素合成が起きる点は同じだが，具体的な過程と生成量はかなり異なる．われわれのユニバースでは，陽子と中性子（あるいは，u クォークと d クォーク）が弱い相互作用を通じて変換されるが，弱い相互作用がなければ，これらの個数は一定に保たれる．したがって，ビッグバンの時点での素粒子の存在比が，その後の元素合成の結果を大きく左右する．最初に陽子が中性子の9倍存在したとすると，元素合成の結果として，質量比で80%の水素，20%のヘリウム4，さらに（質量比は小さいが）われわれのユニバースよりもずっと多量の重水素ができる．陽子よりも中性子が多ければ，大量の中性子がそのまま残り，陽子と中性子の個数が等しければ，単独の陽子も中性子もほぼ消滅してヘリウム4が大量に合成される．

(3) 恒星のエネルギー源が異なる．　われわれのユニバースでは，恒星中心部で pp チェーンと呼ばれる核融合反応が進行することで熱が発生している．pp チェーンは，陽子 p（＝通常の水素の原子核）の核融合によってヘリウム4が作られる反応で，次のような段階を踏んで進行する．

第1段階　$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{D} + \mathrm{e}^{+} + \nu$

第2段階　$\mathrm{D} + \mathrm{p} \to {}^{3}\mathrm{He}$

第3段階　${}^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p} + \mathrm{p}$

弱い相互作用のないユニバースでは，2個の陽子から重陽子（＝重水素原子核）D・陽電子 e^{+}・ニュートリノ ν ができる第1段階の反応が起きない．しかし，われわれのユニバースよりも重水素が豊富にあるため，いきなり第2段階から始まることが可能であり，そのまま第3段階に進むことになる．この反応によって，2個の重陽子と2個の陽子から1個のヘリウム4と2個の陽子ができるが，陽子は個数が変わらず触媒として作用しているだけなので，2個の重陽子が1個のヘリウム4になる過程と見なすことができる．つまり，弱い相互作用のないユニバースの恒星は，まず（水素ではなく）重水素を燃料とする核融合を起こすことになる．

われわれのユニバースにおける主系列星では，水素の核融合が数十億年続くが，弱い相互作用のないユニバースで太陽と同程度の質量を持つ恒星は，短期間で重水素を使い果たし，その後は第 3 段階であるヘリウム燃焼段階が長期間継続する．ヘリウム 3 の核融合で生じるエネルギーは pp チェーンよりも小さいため，恒星はわれわれのユニバースよりも暗く長寿命である．

(4) 恒星で合成される元素が異なる．　恒星内部では，われわれのユニバースと同じように，2 個のヘリウム 4 からベリリウム 8 が，ベリリウム 8 とヘリウム 4 から炭素 12 が，炭素 12 とヘリウム 4 から酸素 16 ができる．しかし，われわれのユニバースではあまり起きない次のような核反応も生じる．

$$^{12}\mathrm{C} + \mathrm{p} \to {}^{13}\mathrm{N}$$
$$^{13}\mathrm{N} + \mathrm{p} \to {}^{14}\mathrm{O}$$

安定な同位体が多いため，われわれのユニバースの恒星で鉄（原子番号 26）までしか元素合成されないのに対して，弱い相互作用のないユニバースでは，ストロンチウム（原子番号 38）まで作られる．

(5) 大質量星の最期が異なる．　巨大な質量を持つ恒星で核融合の燃料がなくなると，重力を支えきれずに潰れ始める．われわれのユニバースでは，このとき，弱い相互作用によって恒星中心部の陽子と電子が中性子とニュートリノに変わるが，ニュートリノがエネルギーを持ち去るために中心部が冷却され，圧力で外層を支えきれなくなって超新星爆発を起こす．後には中性子星かブラックホールが残る．しかし，弱い相互作用のないユニバースでは，陽子が中性子に変わることも，ニュートリノによるエネルギーの持ち去りも起きず，爆発は小規模のまま終了して，小さく圧縮された恒星が残される．超新星爆発は，重い元素（われわれのユニバースでは，鉄よりも原子番号の大きい元素）を合成するのに必要なので，大質量星が超新星爆発を起こさないと，惑星の地殻などにおける元素組成に差が生じる．ただし，弱い相互作用のないユニバースでも，連星系において白色矮星に相手の恒星からガスが流入する結果として起きる Ia 型超新星爆発はあるので，量は減るものの重い元素（ストロンチウムよりも原子番号の大きい元素）は存在する．

弱い相互作用がないユニバースは少なからぬ点でわれわれのユニバースとは違っており，特に，(3) に記した恒星のエネルギー源の違いは，生命の発生と進化に大きな影響を及ぼすだろう．太陽と同程度の質量を持つ恒星は放射量が少ないために，その周囲を回る惑星の表面が生命に適した環境となるには，水星軌道よりも恒星の近くにいる必要がある．しかし，生命にとって不都合なことばかりではない．太陽より大きな質量を持つ

恒星であっても寿命はかなり長くなり，光合成を行うのに充分な光を数十億年にわたって供給できるはずである．

われわれのユニバースは，弱い相互作用が充分に弱くないという特徴を持つが，そうでなければ生命が発生・進化できないということはなさそうであり，この特徴がマルチバース理論の傍証にはならないと言って良いだろう．

§10-2-3　クォークの質量

素粒子の標準模型によれば，クォーク（および電子やミュー粒子など）は，SU(2)×U(1) の対称性を破るヒッグス場と相互作用することで質量を獲得するとされる．クォークには，これまで登場した u クォーク・d クォークの他に，c（チャーム），s（ストレンジ），t（トップ），b（ボトム）の計 6 種類があるが，それぞれの質量の値は，図 10-2 のようになる（比較のために，電子 e の質量も記入してある）．

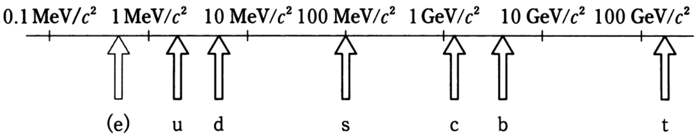


図 10-2　クォークの質量

質量の値を決めるのは，クォーク場ごとに異なるヒッグス場との結合定数（および，凝縮したヒッグス場の値）だが，この結合定数は任意パラメータであり，何らかの原理から導くことはできない．図 10-2 を見る限り，クォークの質量分布は，隠れた規則性を持つと言うよりも，偶然によって決まったように見える．そこで，クォーク場とヒッグス場の結合定数はユニバースごとにバラバラの値になると仮定して，クォークの質量のヴァリエーションが生命の発生・進化に大きな影響を与えるかどうかを考えてみたい．

われわれのユニバースでは，d クォーク（4.1–5.7 MeV/c^2）が u クォーク（1.7–3.1 MeV/c^2）のほぼ 2 倍の質量を持つ．しかし，陽子（uud；938.3 MeV/c^2）と中性子（udd；939.6 MeV/c^2）の質量比は，クォークの質量比ほど大きくはない．その理由は，陽子や中性子の質量の大部分が，構成要素となるクォークの質量ではなく，QCD によって生じるゲージ場（およびクォーク・反クォーク対）のエネルギーに起因するからである．ただし，陽子・中性子の質量の差は，主に u クォークと d クォークの質量差に由来する（電荷の有無は小さな効果しかない）．したがって，クォークの質量を変えたときに何が起きるかを見るには，まず，陽子と中性子の質量の違いに注目しなければなら

ない．

(1) d クォークを少し軽くした場合．　われわれのユニバースでは，中性子の方が陽子より 0.1% 重い．この質量差が電子の質量（0.5 MeV/c^2）よりも大きいため，中性子はベータ崩壊して陽子・電子・反ニュートリノになることができる．中性子が過剰な原子核はベータ崩壊を起こしやすいが，生命活動に重要な炭素 12，窒素 14，酸素 16 などは安定核種となる．それでは，d クォークを少し軽くして，陽子の方が中性子よりも重いとどうなるだろうか？　陽子が中性子より 0.05% 以上重いと，陽子が陽電子崩壊（ベータ崩壊と同じタイプの放射性崩壊で，陽子が陽電子を放出する反応）を起こして中性子に変わってしまうので，水素原子の寿命はきわめて短くなる．このため，安定な物質は存在できないように思えるが，必ずしもそうではない．われわれのユニバースと比べて，陽子と中性子の質量が反対で，重陽子（重水素原子核）の質量が同じ 1875.6 MeV/c^2 になるユニバースを考えてみよう．この場合，重陽子と電子の質量をあわせたものは，中性子の質量の 2 倍よりも小さいので，重陽子がベータ崩壊を起こすことはもちろん，軌道電子を捕獲して 2 個の中性子とニュートリノに変わる次の反応も起きない．

$$\mathrm{D} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + \nu$$

したがって，陽子が中性子より 0.1% 重い場合でも，重水素は安定なままである．このようなユニバースでは，海は重水素と酸素が結合した水（仮に重水と呼ぶことにしよう）からできている．重水は通常の水と比べて物理的・化学的な性質が多少異なるが，有機化学反応を大きく変えるほどではなく，生命の発生・進化に致命的な影響を与えるとは考えにくい．水素の同位体が全て不安定になるのは，陽子が中性子より 1% 以上重いときだけである．

(2) d クォークを重くした場合．　d クォークがわれわれのユニバースよりもずっと重く，実質的に u クォークしか存在しない世界は，完全に不毛である．こうした世界では，QCD によって 3 個の u クォークが結合し，電荷 $+2e$ の Δ^{++} 粒子を作る．しかし，Δ^{++} 粒子が複数個集まって安定な原子核を作ることはなく，存在できる元素は，1 個の Δ^{++} 粒子を原子核とするヘリウムだけである．そこまで重くなくても，d クォークの質量が増えて中性子が陽子よりも 2% 以上重くなった場合，炭素や酸素は不安定になり，生命には適さない世界となる．しかし，こうしたユニバースになるには，d クォークは u クォークの 10 倍弱以上の質量を持たなければならない．質量を決める結合定数が完全に任意パラメータならば，そう仮定してもかまわないだろうが，u クォークと d クォークを他のクォークよりもずっと軽くする共通のメカニズムが働いているとすると，両者の質量が大きく異なるのは不自然なようにも思える．もっとも，現時点では，

こうした問題について確固たる議論を行うだけのデータがない．

(3) sクォークを軽くした場合．　sクォークをuクォークやdクォークと同程度に軽くすると，さまざまな新しい現象が生じる．sクォークとdクォークの質量が等しくuクォークがずっと軽い場合，原子核の構成要素となるのは，陽子と中性子ではなく，陽子（uud）とΣ^+粒子（uus）になる．しかし，2つとも正電荷を持つために，質量数の大きな原子核は不安定となり，生命は発生できない．一方，ずっと軽いのがuクォークではなくdクォークだとすると，原子核は中性子（udd）とΣ^-粒子（dds）から構成されるが，こちらは，われわれのユニバースと同じように多様な元素を作り出すことができる．sクォークの軽いユニバースについては，まだ充分に研究されておらず，わかっていないことも多い．

6つのクォークのうちuクォークとdクォークが飛び抜けて軽く，後者は前者のほぼ2倍の質量を持つというわれわれのユニバースは，確かに，生命の発生に好都合な環境を形作っている．しかし，質量のヴァリエーションがどこまで許されるのかわかっていないので，これだけの知識から，人間原理に基づいてマルチバース理論の正当性を主張することはできないだろう．

10-3節　宇宙定数問題

第4章4-5節で述べたように，暗黒エネルギーに寄与するものとしては，量子場の零点エネルギー，凝縮したスカラー場のポテンシャル，重力相互作用のラグランジアン密度に現れる定数項があるが，これらを全て加えて質量密度の単位（$[\mathrm{kg/m^3}]$）の単位で表したものを，宇宙定数ρ_λとして扱うことにしよう．この量は，これまで使ってきた宇宙定数λと次の関係式で結ばれる．

$$\rho_\lambda = \lambda/\kappa c^2$$

われわれのユニバースでは，宇宙の臨界密度（第3章(3.3)式）は$10^{-27}\,[\mathrm{kg/m^3}]$であり，全物質（暗黒物質を含む）の質量密度の現在値ρ_0はその0.27倍，宇宙定数ρ_λは0.73倍と推定されている．量子場の零点エネルギーについては良くわからないが，万有引力定数G，光速c，プランク定数$\hbar$から作られる質量密度の単位を持つ次の量ρ_P（プランク密度）に近い値だという見方がある．

$$\rho_P = \frac{c^5}{G^2\hbar} = 5\times 10^{96}\,[\mathrm{kg/m^3}]$$

第 9 章 9-2 節〜9-3 節で述べたように，c と $\hbar$ は換算定数なので，ρ_P は，単位を持つ唯一のマルチバーサルな物理定数を質量密度の単位で表したものである．

以上の結果より，われわれのユニバースでは，宇宙定数 ρ_λ は次の関係式を満たしていることがわかる．

$$0 < \rho_\lambda \approx 3\rho_0 \ll \rho_P$$

そこで，宇宙定数の値に関する 2 つの問題が出てくる．①宇宙定数 ρ_λ は，なぜプランク密度 ρ_P よりも 120 桁以上も小さいのか？　②宇宙定数 ρ_λ は，なぜ物質密度の現在値 ρ_0 に近いのか？　これが**宇宙定数問題**であり，人間原理を使ってこれに解答できるかどうかが，以下の議論のテーマとなる．

§10-3-1　生命に適した宇宙定数の範囲——宇宙定数が負の場合

宇宙定数 ρ_λ の値がどのようにして決まるのか，現時点では全くわかっていないが，仮にユニバースごとに異なった値になるとして，ρ_λ がどのような範囲にあるときに，生命の発生・進化が可能になるかを考えてみたい．

ρ_λ が与えられたときに宇宙空間全体がどのように振舞うのかを調べるため，第 1 章のフリードマン方程式 (1.45) を利用する．ただし，観測されている宇宙空間がきわめて平坦なことを考慮して，$k = 0$ と置いて計算を簡単化する．スケール因子 a は観測可能な量ではないので，現在のスケール因子 a_0 との比 $x \equiv a/a_0$ を新たな変数として導入，現在の質量密度 $\rho_0 \equiv M/a_0^3$ や，宇宙定数と現在の質量密度との比 $\alpha \equiv \rho_\lambda/\rho_0$ を使ってフリードマン方程式を書き直すと，次式を得る．

$$x\dot{x}^2 = \frac{\kappa\rho_0 c^2}{3}\left(1 + \alpha x^3\right) \tag{10.1}$$

ここで，積分が簡単にできるように，次式で定義される新たな変数 y を導入する．

$$y = x^{3/2} \qquad (x\dot{x}^2 = \frac{4}{9}\dot{y}^2)$$

さらに，

$$\tau \equiv ct\sqrt{\frac{\kappa\rho_0 c^2}{3}}$$

で定義される新たな時間座標 τ を使うと，(10.1) 式は，次の簡単な微分方程式となる．

$$\frac{2}{3}\frac{dy}{d\tau} = \pm\sqrt{1 + \alpha y^2}$$

この微分方程式は，α の正負に応じて場合分けすれば，直ちに解くことができる．変数を x に戻して表すと，次のようになる．

$$x = \begin{cases} \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \sin\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{|\alpha|}\tau \right) \right\}^{\frac{2}{3}} & (\alpha < 0) \\ \left(\dfrac{3}{2}\tau \right)^{\frac{2}{3}} & (\alpha = 0) \\ \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \sinh\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{\alpha}\tau \right) \right\}^{\frac{2}{3}} & (\alpha > 0) \end{cases}$$

α（宇宙定数と現在の質量密度の比）が変化すると，x と τ のグラフ（図 10-3）も連続的に変形される．

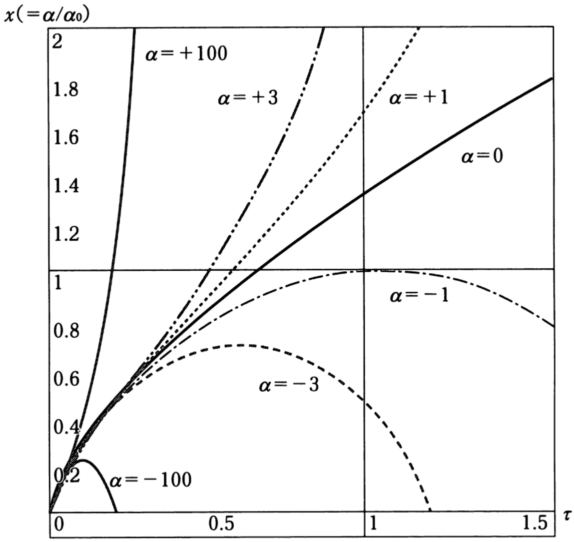


図 10-3　宇宙定数の異なる宇宙

宇宙定数の値が負で絶対値が大きくなると，宇宙空間は短期間で潰れてしまう．$\alpha = +3$ のグラフがわれわれのユニバースの振舞いに近いとすると，このグラフの $x = 1$ の時刻が 137 億年になるはずなので，$\alpha = -100$ の宇宙の寿命は 60 億年程度となる．恒星系が形成されるのに何十億年か掛かることを考えると，生命が進化する時間的な余裕はほとんどない．つまり，宇宙定数が負だとすると，その絶対値が現在の質量密度の

100 倍以下でなければ，高度な文明は存在できないことになる．

§10-3-2　生命に適した宇宙定数の範囲――宇宙定数が正の場合

宇宙定数が正になると，宇宙空間は，ある時期から加速膨張に転じる．生命は天体の表面でしか進化できないと考えられるが，空間の膨張速度があまりに速いと，重力によってガス雲が凝集して天体を形成するよりも，空間が膨張して物質がバラバラになる速度の方が速くなる．こうなると，天体は形成されず，生命が進化する可能性もなくなる．

正の宇宙定数による加速膨張がありながら銀河や天体が形成されるためには，どのような条件が満たされなければならないだろうか？　この問いに答えるために，次のように簡単化したケースを考えよう．

3 次元空間の 1 点を中心に，球対称な状態で膨張する宇宙空間を考える．第 1 章 §1-1-1 で 2 次元球面を考えたが，このときは，原点（$x=y=0$）から極座標で r だけ離れても空間の状態は変わらないと仮定していた．この仮定を採用せず，原点から遠ざかるにつれて質量密度や空間の曲率が変化するような場合，これらの量は r の関数となる．球対称な 3 次元空間の長さ要素 ds は，一般に次の式で表せることが知られている．

$$ds^2 = -d\left(ct\right)^2 + \frac{1}{1-r^2/R\left(r\right)^2}\left(\frac{\partial\left\{ra\left(t,r\right)\right\}}{\partial r}\right)^2 dr^2 + a\left(t,r\right)^2 r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{10.2}$$

ここで，空間全域は正の曲率を持つと仮定した．a と R が中心からの距離 r に依存しない場合には，この式は，（$R=1$ になるように r をリスケールするだけで）第 1 章 (1.31) 式と一致する．(10.2) 式から導かれるアインシュタイン方程式は，次式となる（これ以外にもう 1 つ式があり，それを使って質量保存則などを導くことができるが，ここでは省略する）．

$$\left\{\frac{\partial a\left(t,r\right)}{\partial\left(ct\right)}\right\}^2 = \frac{\left[\kappa\left\{\rho\left(t\right)+\Delta\rho\left(t,r\right)\right\}c^2+\lambda\right]}{3}a\left(t,r\right)\frac{\partial\left\{ra\left(t,r\right)\right\}}{\partial r} - \frac{1}{R\left(r\right)^2} \tag{10.3}$$

ここで，$\rho\left(t\right)$ は空間全域にわたる平均的な物質密度，$\Delta\rho\left(t,r\right)$ は質量密度の $\rho\left(t\right)$ からのずれ，λ はもともとの宇宙定数（$\lambda=\kappa c^2\rho_\lambda$）である．

これらの式の導き方はここには記さない．興味のある読者は，ピーブルスによる 1967 年の原論文とそこに記された参考文献を参照していただきたい．

(10.3) 式のままでは r 依存性があって扱いにくいので，$r=0$ となる原点付近の振舞

いに限ることにする．$a(t,0)$，$\Delta\rho(t,0)$，$R(0)$ をそれぞれ a，$\Delta\rho$（>0），R と表す（それ以外の量も，誤解が生じないと思われる範囲で引数を省略する）．さらに，（第 1 章 (1.36) 式に相当する）原点付近での質量保存則：

$$(\rho+\Delta\rho)\,a^3 = M \tag{10.4}$$

を使えば，(10.3) 式は次のようになる．

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa M c^2}{3a} + \frac{\lambda a^2}{3} - \frac{1}{R^2} \tag{10.5}$$

この式は，空間曲率が正の一様等方空間におけるフリードマン方程式（第 1 章 (1.45) 式）とほぼ同じで，曲率項が $k=+1$ という一定値ではなく，$R(r)$ の原点での値で表される点だけが異なっている．式の上では，$aR \to a$，$MR^3 \to M$ と置き換えるだけで第 1 章 (1.45) 式と完全に同じになるので，方程式の解の定性的な振舞いは，閉じたフリードマン模型と等しい．

宇宙定数 λ がゼロの場合，(10.5) 式の解は，宇宙項のない閉じたフリードマン模型と同じ振舞いをする．すなわち，a は当初は大きくなっていくが，最大値を取った後に減少に転じ，ある時刻で $a=0$ となる．ただし，フリードマン模型の場合とは異なり，この a は，空間全域のスケール因子ではなく，原点付近のスケールを表すものである．したがって，a のこうした振舞いは，平均よりも密度の高い領域があると，当初は周囲と同じように膨張を始めても，途中で物質同士の引力が勝って収縮に転じることを意味する．

計算上は a がゼロとなって原点付近の空間が潰れてしまうという結果になったが，これは，圧力項を無視したアインシュタイン方程式を立てたためである．実際には，物質が集まってくると圧力が無視できなくなり，周辺よりも密度の高い球状のガス雲となる．このガス雲に衝撃波などによる揺らぎが生じると，重力不安定性によって物質の凝集が進み，ガス雲の中に天体が形成されることになる．このように，宇宙の初期における重力の効果によって，まず球状星団が誕生する．銀河は，球状集団が合体して形成されたと考えられている．

宇宙定数がゼロではなく正の場合には，空間全域の膨張速度が加速されて増えていくので，原点付近が潰れるよりも速く空間が膨張してしまう可能性がある．こうなると，天体が形成される前に物質がバラバラになってしまい，天体はできず生命の発生も望めない．

原点付近で物質が凝集を始めるための条件を導くことにしよう（この議論は，1987 年のワインバーグの論文に基づいている）．

$\lambda > 0$ のときの (10.5) 式の解には，第 1 章 §1-3-4 で示したフリードマン模型の場合と同じように，a が途中で最大値を取ってから減少に転じる解と，0 からどこまでも増え続ける解の 2 種類がある．前者ならば天体が形成され，後者ならば形成されずにバラバラになる．この 2 つのケースを分けるのが，(10.5) 式右辺が $a > 0$ の範囲でゼロになるかどうかである．

(10.5) 式の右辺を a 倍したものを $f(a)$ と書くと，$f(a)$ は a の 3 次関数になる．$f(0) > 0$ なので，$a > 0$ で $f(a)$ にゼロ点が存在するには，$f'(a) = 0$ となる a（> 0）に対して $f(a) < 0$ となれば良い．(10.5) 式を使うと，この条件は $f\left(1/R\sqrt{\lambda}\right) < 0$ であり，具体的には次の式になる．

$$\frac{1}{R^2} > \left(\frac{\kappa M c^2}{2}\right)^{2/3} \lambda^{1/3} \tag{10.6}$$

(10.6) 式は，曲率項が宇宙定数によって与えられる臨界値より大きいという条件式になる．R は時間に依存しない量として定義されているので，$t \to 0$ の極限を考えることにしよう．$t \to 0$ では，物質密度の平均値 ρ はどこまでも大きくなるが，$\Delta\rho$ は平均値 ρ の周りの揺らぎであり，ρ に比べて有意に小さいと仮定してかまわない．したがって，ρ に対する $\Delta\rho$ を 1 次の微小量とし，a に関しても 1 次の微小量まで展開して，1 次までの近似式を考えることができる．t が充分に小さいとき，（フリードマン模型と同様に）a は t の 2/3 乗に比例するので，(10.4) 式から次式が得られる（A，b，ν は新たに導入した未知数）．

$$a = A\,(ct)^{2/3}\left(1 - \frac{b}{3}\,(ct)^{\nu}\right)$$
$$\rho + \Delta\rho = \frac{M}{A^3}\,(ct)^{-2}\left(1 + b\,(ct)^{\nu}\right) \tag{10.7}$$

(10.5) 式で t の指数を比較すると，$\nu = 2/3$ であることがわかる．t の指数が同じ項を 1 次近似の範囲でまとめると，次の式を得る（実は，$\Delta\rho$ を微小量として 1 次まで計算するという近似はあまり精度が良くないのだが，ここで知りたいのは精密な結果ではなく，宇宙定数の大まかな上限だけなので，このまま計算を続ける）．

$$A = \left(\frac{3\kappa M c^2}{4}\right)^{1/3}, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{20}{27} A^2 b \tag{10.8}$$

(10.6) 式と (10.8) 式から，宇宙定数の許される上限として，次の不等式が得られる（係数は後の計算を簡単にするように付けた）．

$$\lambda < \frac{500}{729} \cdot \frac{4}{3} b^3$$

b は，(10.7) 式に示されるように，宇宙初期の密度揺らぎと関係する量である．そこで，

$$\tilde{\rho} \equiv \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\rho^3}{\rho^2} = \frac{4b^3}{3\kappa c^2} \tag{10.9}$$

によって，質量密度の単位を持つ量 $\tilde{\rho}$ を導入すれば，宇宙定数の上限は次式で与えられる．

$$\frac{\lambda}{\kappa c^2} = \rho_\lambda < \frac{500}{729}\tilde{\rho} \tag{10.10}$$

左辺は，質量密度の単位で表した宇宙定数である．この不等式は，最初の天体が形成されるためには，宇宙定数が，宇宙初期の密度揺らぎによって与えられる臨界値以下でなければならないことを示している．この不等式が満たされない宇宙には，生命は存在しない．

$\tilde{\rho}$ の値についてはわからないことが多いが，次のような見積もりをしてみたい．

ごく初期の天体が形成される段階では，宇宙項の寄与は小さいと推定されるので，(10.5) 式で $\lambda = 0$ と置いた場合を考えることにしよう．このとき，(10.5) 式の解は，媒介変数 τ を使った形で第 1 章 (1.38) 式で与えてある．この式によると，膨張から収縮に転じた後に $a = 0$ となるのは $\tau = 2\pi$ となる時刻である．この時刻をビッグバンからの宇宙標準時で T だけ経過した時刻だとすると，次のように表される（第 1 章 (1.38) 式の a_0 は一般相対論の教科書に与えられているので，その公式を (10.8) 式と (10.9) 式を使って書き直すようにすれば，比較的簡単に計算ができる）．

$$cT = 2\pi \cdot \frac{\kappa M c^2}{6} R^3 = 9\pi \left(125\kappa c^2 \tilde{\rho}\right)^{-1/2} \tag{10.11}$$

この T が，最初期の天体が形成される平均的な時刻である．天体が発する光の赤方偏移 z（光の波長は $(1+z)$ 倍に伸びる）と，光を発した宇宙標準時 T との関係は，膨張の仕方に依存しており，加速膨張がある場合は簡単ではないが，ここでは，大ざっぱな見積もりをしたいだけなので，宇宙定数をゼロと置いた膨張モデルによる次の式を利用する（宇宙定数がゼロでない場合，T はこの式の右辺の値よりも小さい）．

$$cT = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\kappa c^2 \rho_0\right)^{-1/2} (1+z)^{-3/2} \tag{10.12}$$

(10.12) 式の赤方偏移 z を宇宙標準時 T の代わりに時刻の指標として用いることにすると，(10.11) 式より，赤方偏移 z の天体が形成される場合の初期密度揺らぎ $\tilde{\rho}$ の値が (宇宙定数をゼロとする近似で）求められる．

$$\frac{500}{729}\tilde{\rho} = \frac{1}{3}\pi^2\rho_0\,(1+z)^3 \tag{10.13}$$

正の宇宙定数が存在する場合は，この天体が形成されるための条件として，(10.13) 式の $\tilde{\rho}$ が (10.10) 式を満たすことが必要となる（厳密に言えば，宇宙定数が存在するときの $\tilde{\rho}$ の値は少し異なったものになる）．これより，宇宙定数の上限として次式が得られる．

$$\rho_\lambda < \frac{1}{3}\pi^2\rho_0\,(1+z)^3 \tag{10.14}$$

これまで発見された最古の天体は $z = 8$ なので，(10.14) 式を使えば，（質量密度の単位で表した）宇宙定数が現在の質量密度の 2000 倍以下でなければ，いかなる天体も形成できないことになる．しかし，この上限ぎりぎりの宇宙定数が存在すると，ビッグバンから数億年程度で形成される原始星以外は，球状星団も銀河も存在しない閑散たる宇宙になり，高度な文明が誕生するとは考えにくい．球状星団が集まって銀河が形成される段階まで達して，初めて生命が進化できると仮定すれば，$z = 2$ 程度に置くのが妥当ではないかと思われる．

したがって，§10-3-1 の宇宙定数が負の場合とあわせると，生命が発生・進化することができる宇宙定数の範囲は，次のようになる．

$$-100\rho_0 < \rho_\lambda < 100\rho_0 \tag{10.15}$$

§10-3-3　「$\rho_\lambda \ll \rho_P$」は人間原理で説明できるか？

こんにち，最も確からしいとされる宇宙定数 ρ_λ の値は，現在の質量密度 ρ_0 の 3 倍程度であり，零点エネルギーの理論的な推定値であるプランク密度 ρ_P より 120 桁以上も小さい．仮に，宇宙定数の値が異なるさまざまなユニバースが存在しており，その中でたまたま (10.15) 式の範囲を満たすユニバースにだけ進化した生命が誕生するとすれば，宇宙定数がプランク密度より異常に小さい理由が説明できるだろうか？

人間原理のアイデアに従えば，この説明は正しいように思えるかもしれない．実際，この説明を認めて，マルチバース理論の正当性が確かめられたと主張する物理学者もいる．しかし，この説明が成り立つためには，さまざまなユニバースで宇宙定数が 120 桁以上の範囲にわたって分布している必要がある．現在の知識では，異なる宇宙定数をもたらすのは，スカラー場が取り得るさまざまな極小値しかない．したがって，人間原理によって宇宙定数とプランク密度の差を説明するには，膨大な数の極小値を仮定しなければならない．これは，あり得ないことではないが，ありそうもないように思える（宇宙定数の値に膨大なヴァリエーションがあるほとんど唯一の可能性として超ひも理論が

あるが，これについては §10-3-5 で取り上げる）.

なぜ，宇宙定数がプランク密度より 120 桁以上も小さいのか？「全くわからない」というのが，多くの物理学者の本心だろう．だが，わからないことに関しては論文が書けないため，人間原理に基づく怪しげな説明だけが目立ってしまうのである.

§10-3-4 「$\rho_\lambda \approx 3\rho_0$」は人間原理で説明できるか？

生命が発生・進化できる宇宙定数 ρ_λ の範囲は，(10.15) 式に示したように，現在の質量密度 ρ_0 の -100 倍から $+100$ 倍までである．しかし，実際には，ρ_0 の 3 倍でしかなく，許容範囲の中では，なぜか 0 に近い値になっている．この理由は説明できるのだろうか？

(10.15) 式は宇宙定数の上限と下限を示しただけであり，この範囲ならばどんな値でも同じように生命が発生・進化できるという訳ではない．宇宙定数が負ならば，絶対値が大きいほど宇宙の寿命が短くなり，正ならば，絶対値が大きいほど天体が形成されにくくなる．どちらのケースでも，絶対値が小さい方が生命にとって好適であり，ユニバース内部に誕生する文明の数が多くなると予想される.

それでは，宇宙定数がどのような値になると，文明が生まれにくくなるのだろうか？ここで重要なのは，宇宙史において，文明の誕生に適した時期があるかどうかである.

任意の恒星の周囲で生命が発生・進化する確率はかなり低いので，高い知能を持った生物は，多数の恒星が作られる領域に集中しているだろう．銀河や星団が衝突した場合にもガス雲の密度が高くなって星形成が活発になるが，こうした領域は，多量の放射線や小天体が飛び交うため，必ずしも生命の発生・進化に好適ではない．文明の揺籃（ようらん）となるのは，星形成の活発な渦巻銀河の腕の部分だと考えられる.

渦巻銀河は，球状星団や不規則銀河が合体し形を整えることでできあがるので，ビッグバンからかなり時間を経ないと誕生しない．これまで発見された最も古い渦巻銀河は，ビッグバンから 30 億年後のものだが，多くの渦巻銀河は，そのさらに数十億年後に誕生している．しかも，渦巻銀河の寿命はあまり長くなく，他の銀河との衝突がなければ，20〜30 億年程度で渦巻き構造を消失すると考えられる（ただし，銀河同士の衝突はかなり頻繁にあり，われわれの天の川銀河も，いて座矮小銀河と衝突中である）．この先，数百億年も経たないうちに，銀河の大半は，星形成をほとんど行わない楕円銀河になってしまうだろう.

おそらく，われわれのユニバースにおいて，星形成が最も盛んで数多くの文明が誕生するのは，ビッグバンから 50〜200 億年程度の期間だと思われる．この期間に「現在」が含まれるのは，もちろん偶然ではなく，人類もそうした文明を生み出す生物の一種だからである．宇宙定数を変化させたとき，この期間がどうなるかが，誕生する文明の数

を左右する．

宇宙空間が膨張するにつれて物質密度は低下していくが，その値が（正の値を持つ）宇宙定数以下になると，加速膨張に転じる．その時期が，文明を生み出すのに好適な期間よりもかなり前になるようなユニバースでは，渦巻銀河を形成するような銀河の合体が進まず，あまり多くの文明は生まれないだろう．宇宙定数の値を横軸に，誕生する文明数の期待値を縦軸に取ったグラフは，不明な点が多いものの，おおよそ図 10-4 のような形になると推測される．

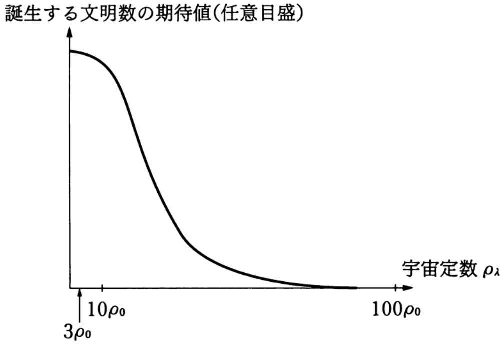


図 10-4　宇宙定数と文明数の関係

人間原理に基づいて議論するためには，宇宙定数 ρ_λ のユニバースができる確率 $P(\rho_\lambda)$ と文明数の期待値との積を取り，どこにピークがあるかを調べなければならない．もし $3\rho_0$ 付近にピークが見つかれば，「$\rho_\lambda \approx 3\rho_0$」であることの説明になるのかもしれない．しかし，$P(\rho_\lambda)$ がどのようにものになるのかについて，確実な理論はない（ヴィレンキンら何人かの物理学者が，いくつかの提案を行ってはいるが，いずれも特定のモデルに依拠している）．そもそも，プランク密度 ρ_P よりも桁違いに小さくなる理由がわかっていないのだから，議論の進めようがない．

マルチバース理論を信奉する物理学者の中には，人間原理を使って「$\rho_\lambda \approx 3\rho_0$」である理由が説明できたと主張する人もあるが，それほどの確実性はないことは強調しておきたい．

§10-3-5　超ひも理論のランドスケープ

第 8 章でブレイン宇宙論を取り上げる際に紹介した超ひも理論では，時空次元数が 10 次元になる．ブレイン宇宙では，観測されている時間 1 次元・空間 3 次元は特定のブレ

インの内部であり，これ以外に拡がった次元が存在する可能性が示されたが，余剰の 6 次元全てがカルツァ－クライン機構で小さく丸まる（コンパクト化する）ことも考えられる．

実際に余剰次元が小さくなり，3 次元空間が加速膨張するような現実的な宇宙モデルが超ひも理論に基づいて作れるかどうかについては，主に今世紀に入ってからいろいろな議論がなされたが，モデルを工夫すれば不可能ではないことがわかってきた（例えば，単純な超ひも理論では宇宙定数は一般に負になるが，対称性の破れなどをうまく利用すれば，正の宇宙定数を実現できる）．2012 年には，あるタイプの超ひも理論に基づくコンピュータ・シミュレーションを行い，もともとの 9 次元空間に異方性がなかったにもかかわらず，時間が経過すると 3 次元方向だけが膨張を始めることが示された（キム－西村－土屋の 2012 年の論文）．

プランク長 l_P 程度まで小さくなった余剰次元が，拡がった時空の物理現象にどんな影響を及ぼすか，簡単な例を使って見てみよう．まず，空間座標 w で表される 1 つの余剰次元が小さく丸まっている場合を考える．この場合は，その次元だけが円環になっているようにイメージすることができる．w 以外の拡がった空間座標を x, y, z として，場を $\phi(t,x,y,z,w)$ と書くことにしよう．コンパクト化した空間の長さ（円で表したときには円周の長さ）を L とすると，w 方向に関して，全ての物理量は周期 L の周期関数でなければならないので，次のようにフーリエ展開することができる．

$$\phi(t,x,y,z,w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi^{(n)}(t,x,y,z)\, e^{2\pi niw/L} \tag{10.16}$$

ここで，場 $\phi(t,x,y,z,w)$ が波動方程式を満足していたとしよう．ただし，式を簡単にするために，時空にゆがみはないものとし，時間 1 次元・空間 4 次元のミンコフスキ計量が使えるものとする．このとき，フーリエ係数 $\phi^{(n)}$ は，次のように，質量項のある波動方程式を満足することになる．

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle + \frac{\partial^2}{\partial w^2}\right)\phi(t,x,y,z,w) = 0\\ &\qquad\Rightarrow\quad \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2\right)\phi^{(n)}(t,x,y,z)\end{aligned} \tag{10.17}$$

この式は，拡がった空間で見ると，無限個の新たな場 $\phi^{(n)}$ が現れることを意味する．ただし，L はプランク長程度に小さくなると予想されるので，新たな場に生じる素粒子の質量はきわめて巨大になり，拡がった空間における通常の物理現象に関与することはない．

2 つ以上の余剰次元がコンパクト化すると，少々難しくなる．まず，2 次元の場合を考えよう．この場合，コンパクト化した余剰次元が構成する閉じた（端のない有限な大きさの）2 次元の面には，球のように穴が開いていないものと，ドーナッツのように穴が開いたものが存在する．ここで，トポロジーと呼ばれる数学分野の方法論を利用する．トポロジーでは，ちぎったり穿（うが）ったりしない連続的な変形によって一致させられる図形は，同じものに分類される．例えば，穴のない全ての閉じた 2 次元面は，トポロジーの観点からは，球面の仲間に分類される．穴が 1 つ開いているドーナッツ面は，どう変形しても球面にはならないが，球面に取っ手を 1 つ付けたものに変形することができるので，取っ手の数が 1 の仲間に分類される．こうして，2 次元面のトポロジーは，取っ手の数を使って分類できる．

(10.16) 式と同様に場を展開するには，コンパクト化された空間におけるラプラス演算子の固有関数を利用することが多い．2 次元の例からわかるように，コンパクト化された空間にはゆがみがあるのが一般的なので，ラプラス演算子の定義には計量テンソルが現れる．固有値 ν_α の固有関数を $f^{(\alpha)}$ とすると，$f^{(\alpha)}$ は次式を満たす（$f^{(\alpha)}$ の引数の数や添字 I, J の範囲は，余剰次元の次元数による）．

$$g^{IJ}\partial_I\partial_J f^{(\alpha)}(w,\cdots) = -\nu_\alpha^2 f^{(\alpha)}(w,\cdots) \qquad (I, J = 4, \cdots)$$

$f^{(\alpha)}$ を使って，もともとの時空（超ひも理論では 10 次元時空）で質量のない波動方程式を満たす場 ϕ を展開することを考える．

$$g^{IJ}\partial_I\partial_J f^{(\alpha)}(w,\cdots) = -\nu_\alpha^2 f^{(\alpha)}(w,\cdots) \qquad (I, J = 4, \cdots)$$

コンパクト化される余剰次元と拡がった 4 次元時空が完全に分離されているとすると，(10.17) 式と同じようにして，4 次元時空で見たとき，ν_α に比例する質量項を持つ新たな場 $f^{(\alpha)}$ が現れることが示される．多くの場合，ν_α はプランク長の逆数と同程度という非常に大きな値になるので，新たな場の存在は，4 次元時空における通常の物理現象には関与しない（ν_α が小さくなる例外的なケースについては別に議論する必要があるが，ここでは触れない）．

このように，余剰次元がきわめて小さくなった場合，その影響は拡がった時空にはほとんど影響を及ぼさない．しかし，重要な例外が存在する．それが，コンパクト化された空間のエネルギーであり，拡がった 4 次元時空から見ると，暗黒エネルギーとして姿を現す．

余剰次元に由来する暗黒エネルギーは何種類の値を取り得るかという見積もりを紹介したい．超ひも理論では，6 次元の余剰次元がコンパクト化された空間――「**カラビ・ヤウ多様体**」と呼ばれる――が扱われるが，超ひも理論で許される安定な空間の形は，

トポロジーに基づく分類で，取っ手の数がせいぜい 500 個程度までとされる．さらに，超ひも理論には，フラックスと呼ばれる一種の力線が現れるが，このフラックスが取っ手の中を通っているか否かによって，余剰次元のエネルギーが違ってくる．したがって，500 個の取っ手の 1 つ 1 つにフラックスが通っているかどうかで区別すれば，暗黒エネルギーの取り得る値は，総数が $2^{500} \approx 10^{150}$ ほどになる．

これは，途轍(とてつ)もなく巨大な数である．宇宙定数問題の 1 つは，宇宙定数 ρ_λ の値が，理論的な予想値であるプランク密度 ρ_P より 120 桁以上も小さいことだったが，そのときに現れた 10^{120} という数よりも，さらに 30 桁ほど大きい．そこで，この巨大数を利用すれば，宇宙定数問題が解決できるのではないかというアイデアが提案された．

余剰空間に由来する暗黒エネルギーは，プランク長と関係していると予想されるので，その最大値はプランク密度 ρ_P と同程度になるはずである．もし，余剰空間がどのようにコンパクト化するかが偶然にまかされたまま次々とユニバースが誕生するか，あるいは，1 つのユニバースの中で余剰空間の構造が異なる状態へとランダムな量子遷移（第 6 章で述べたトンネル効果による遷移）が起きるとすれば，それぞれのユニバースでの暗黒エネルギーは，$-\rho_P$ から $+\rho_P$ の間に存在する 10^{150} 個の値の任意の 1 つを取るはずである．ほぼ全てのユニバースは，急激に加速膨張して天体が形成されないか，ごく短期間で潰れてしまうかのいずれかになって，文明を宿すことができない．しかし，膨大な数の不毛なユニバースが次々と生まれる中で，全くの偶然で宇宙定数がプランク密度より 120 桁以上も小さい値を取って，生命が発生・進化できるユニバースが誕生することも不可能とは言えない．こうして生まれたのが，われわれのユニバースなのかもしれない．

暗黒エネルギーの値にこれほど膨大なヴァリエーションがあると，もはや個々のケースを区別して考えることができない．超ひも理論の研究者であるサスキンドは，エネルギーのグラフを描くと高低差の激しい山脈のような様相を呈することから，この状況を 1 つの「**ランドスケープ**（風景）」として鳥瞰(ちょうかん)すべきだと提案した．

超ひも理論のランドスケープは，宇宙定数問題を解決する鍵になるのだろうか？ 肯定的な人も否定的な人もいるが，まだ確固たる議論をするだけのデータがないというのが現状である．

第 11 章

多世界解釈

宇宙がいくつも存在するという考え方としては，カオス的インフレーション理論やエキピロティック宇宙論が典型的だが，これらとやや異なるアイデアとして，量子論的な多世界解釈と呼ばれるものがある．ごくかいつまんで言うと，量子揺らぎの中に異世界がいくつも重なって存在するというもので，学界で主流となっている解釈ではないが，著名な物理学者の中にも支持者が少なくない．本章では，この解釈について見ていきたい．

11-1 節　多世界解釈と量子論的な干渉

第 2 章で述べたように，量子論では，さまざまな経路に $\exp(iS/\hbar)$（S：経路に対する作用）という重みを付けて重ね合わせた経路積分によって，遷移振幅が表される．一般の経路は，経路を変化させたときに $\exp(iS/\hbar)$ がゼロの周りで振動するため，重ね合わせたときに寄与が打ち消しあう．一方，古典解は，作用 S が最小値（正確に言えば停留値）を取る経路なので打ち消しあいが生じず，大きな寄与を与える．このため，巨視的な物理現象では，多くの場合，ニュートン力学やマクスウェル電磁気学で記述される古典的な振舞いが卓越し，量子効果は，古典解の周りの量子揺らぎという形でしか現れない．

安定な古典解が存在しないようなケースでは，量子効果が強く現れることもある．例えば，原子核の電磁場に補足された電子を古典論で扱うと，短時間で原子核の中に落ち込んでしまう．ところが，量子論になると，量子揺らぎによって原子核の周囲に電子場の定在波が形成され，古典解とは全く異なる安定状態が実現される．結晶や高分子でも同様であり，安定な古典解が存在しないために，量子論に見られる波動的な振舞いが顕著になる．こうしたケースは，生命体のような秩序を持った構造の形成に決定的な重要性を持つが，その大部分が微視的な現象に限られており，巨視的な観点からは，古典解

の振舞いが世界を支配しているように見える．

しかし，ここで疑問が生じる．古典解が 1 つに限られないときには，何が起きるのだろうか？ 例えば，カオス的インフレーション理論でスカラー場のポテンシャルに複数の極小値がある場合を考えよう．場がポテンシャルの極小値に落ち込んで安定するというのは古典論的な振舞いなので，極小値の数だけ古典解が存在する．ニュートン力学やマクスウェル電磁気学では，初期条件を与えれば経路が確定するため，実現されるのは古典解の中の 1 つでしかない．だが，量子論では，重ね合わされるさまざまな経路の中に複数の古典解が含まれてしまい，1 つに限ることができない．ここで経路積分に複数の古典解を含めると，物理定数の異なる世界が量子揺らぎの中に併存することになる．こうした事態が実際に起きていると見なすのが多世界解釈である．

複数の古典解が存在するケースの扱いが難しいのは，異なる古典解の間でも量子論的な干渉が起こり得るからである．この問題を考える上で格好の素材となるのが，二重スリットによる干渉実験である．良く知られているのが光学におけるヤングの実験だが，ここでは，電子を用いた実験について考えることにしよう（図 11-1；実際には，スリット 1 とスリット 2 の間隔はプレートの間隔に比べて遥かに小さく，また，干渉縞の明線の間隔よりも遥かに大きいが，ここでは見やすくなるように誇張して描いている）．

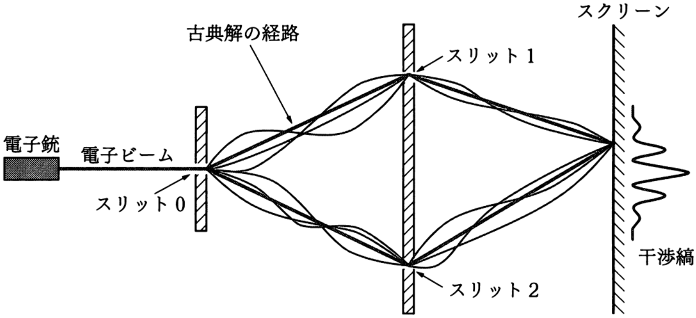


図 11-1 電子ビームによる二重スリット実験

電子銃（武器ではなく，加速した電子をビーム状に放出する装置）から放出された一定の運動量 p を持つ電子を照射すると，背後のスクリーンに到達した電子の痕跡が干渉縞を作る．干渉縞のパターンは，ド・ブロイの関係式 $k = p/\hbar$ から求まる k を使うと，波数 k（$= 2\pi/\lambda$；λ：波長）の光波を二重スリットに照射した場合のヤングの実験と同じになる．興味深いのは，ビームの密度を低くして電子を 1 つずつ照射したときにも，

スクリーン上に到達した電子の痕跡を重ねていけば干渉縞が現れる点である．この結果から，干渉縞は，電子同士の相互作用によって作られるのではなく，1 個の電子の運動に起因することがわかる．

この現象を，（場の量子論ではなく）粒子の量子論（量子力学）によって記述してみよう．図 11-1 のように，電子ビームをスリット 0 で絞った後に，スリット 1 と 2 を通過させるセットアップを考える（スリット以外の部分に衝突する大部分の電子については，無視する）．スリットを通過する際の運動状態の変化は，電子を波動と見なした場合には波の回折だと解釈されるが，電子を粒子として扱うと，スリットから横方向（図では上下方向）に運動量を受けて向きが変えられたことになる．ニュートン力学を使うと，途中の空間で電子は直進するはずなので，古典解は，スリット 0 からスリット 1 または 2 のいずれか一方を経てスクリーンに至る折れ線になる．ニュートン力学が成り立つ世界では，2 つの古典解は排他的であり，どちらか 1 つだけが実現される．だが，量子論ではそうではなく，2 つの古典解のどちらも経路積分に含めなければならない．このことは，古典解の周囲の量子揺らぎを先に積分してしまい，遷移振幅を近似的に

$$C_1 \exp\left(iS_1^{\mathrm{cl}}/\hbar\right) + C_2 \exp\left(iS_2^{\mathrm{cl}}/\hbar\right) \tag{11.1}$$

という形で表せばわかりやすいだろう．S_1 と S_2 は，それぞれスリット 1 ないし 2 を通過する経路の作用で，右肩の“cl”は古典解に対応することを表す．また，C_1 と C_2 は，量子揺らぎの効果を含む係数である．1 次元運動する自由粒子の場合，古典解の作用 S を経路終端の座標 q の関数と見なして微分したものは，終端での運動量 p になることが知られている（これは，ラグランジアン L の微分 $\partial L/\partial \dot{q}$ が運動量になることを使えば，第 4 章 (4.3) 式から直ちに導かれる）．運動量が電子銃から放出されたときの値 p のまま変わらないと仮定すると，スクリーン上の異なる位置に到達する電子の場合，経路長 l の変化 δl に対して，作用が

$$\delta S^{\mathrm{cl}} \approx p\delta l = \hbar k \delta l \tag{11.2}$$

のように変化する．これを (11.1) 式に代入すれば，光波のヤングの実験の場合と同様の干渉縞を作ることは明らかだろう．

二重スリットの実験で重要なのは，電子がスクリーンに到達するまでの量子論的な過程（量子過程）に，2 つの古典解の両方が含まれるという点である．いずれか一方しか含まれないとすると，干渉縞は決して現れない．電子を自立的な粒子と見なすと，1 つの量子過程で異なるスリットを通過することは理解しがたいが，この不可解さは，古典論の描像を量子論的な現象に無理に当てはめようとしたせいである．第 2 章で述べたように，電子はニュートン力学に現れるような粒子ではなく，量子場が粒子的に振舞って

いる状態であり，遷移振幅は，量子場の状態がどのように伝わるかを表す量なのである．

二重スリットの実験は，1 つの量子過程に複数の古典解が含まれ得ることを示している．それでは，複数の古典解が現れる場合には，これら全てをいつも 1 つの量子過程に含めなければならないのだろうか？ 例えば，二重スリットの背後で 2 つの波を干渉させることをせず，それぞれのスリットのすぐ後ろにシンチレーション検出器などを設置し，電子がどちらのスリットを通ったかに応じて巨視的に異なる動作を引き起こすようにした場合を考えよう．このとき，各スリットを通る古典解をあわせて 1 つの量子過程の中に含めるならば，スリット通過後に生じる一連の動作も，同じ量子過程の続きとして統一的に扱わなければならないはずである．問題は，この 2 つが巨視的に見て区別できる現象となる点である．多世界解釈では，この状況を容認し，1 つの量子過程の中に巨視的に区別できる現象が実際に併存していると見なす．

学界の主流は，多世界解釈ではなく，実際に生起するのは巨視的に区別できる現象のうちの 1 つだけだという見方である．ここで鍵となるのが，量子論的な干渉の有無である．二重スリット実験では，2 つの古典解が互いに干渉して干渉縞を作り出していた．このように，異なる古典解であっても，互いに干渉し得る場合——**コヒーレンス**（可干渉性）がある場合——には，1 つの量子過程に含めなければならない．しかし，相互作用を行うシステムの場合，コヒーレンスが維持される範囲はせいぜいメソスコピック領域（ミクロとマクロの中間領域）であり，ランダムな過程が含まれる場合には直ちにコヒーレンスの喪失（「**デコヒーレンス**」と呼ばれる）が起きる．デコヒーレンスが起きた場合には，別個の過程として扱うべきだというのが主流派の見方である．

コヒーレンスとは，もともと光学で論じられた概念である．自然光の場合，近似的に正弦波で表される波は数波長程度しか続かないため，半透明鏡などを使って 2 つに分けた光を再び 1 つに合流させても，両者の経路長の差が大きければ干渉縞は観察されない．これに対して，レーザー光になると，正弦波で表され互いに干渉し得るような長さ（コヒーレント長）が巨視的な距離になり，比較的容易に干渉させられるため，干渉を利用したさまざまな光制御が可能になる．自然光はコヒーレンスが弱く，レーザー光はコヒーレンスが強い．

光学では，コヒーレンスは干渉縞の有無のような表面的な現象にかかわる性質だが，量子論になると，より本質的な意味を持つ．有名な「シュレディンガーの猫」のケースについて考えよう．放射性核種のアルファ崩壊がトリガーとなって致死性の毒ガスが放出される装置を用意し，気の毒な猫をこの装置に入れる．半減期が経過し計算上 50% の確率でアルファ崩壊が起きた時点では，量子論によると，猫は，生きた状態と死んだ状態がフィフティ・フィフティの重みを付けて重ね合わされたものになる．これ

は，「生きている」と同時に「死んでいる」ことになり，（論理的な矛盾はないものの）常識外れである．しかし，主流派の解釈では，これは謎ではない．生きた状態と死んだ状態は互いにデコヒーレントになっており，両者の状態は実質的に区別されるべきなので，現実には「生きている」または「死んでいる」のどちらかでしかない．

量子論におけるデコヒーレンスのアイデアは，1960 年代から少しずつ練り上げられてきたが，最近では，量子コンピュータとの関連で議論されることが多くなった．量子コンピュータとは，1 つの量子過程の中で複数の演算を並列的に行う装置で，従来のコンピュータに比べて飛躍的な高速化が実現できる．ただし，それぞれの演算過程がデコヒーレントになると並列性が失われてしまうため，コヒーレンスを維持したまま演算を行うことが課題になっている．

デコヒーレンスを理論的にきちんと扱うのは，量子場理論（場の量子論）はもちろん，量子力学（粒子の量子論）でもかなり難しい．そこで，比較的解析の容易な二重スリット実験に関して，どのような場合にデコヒーレンスが起きるかを具体的に調べ，その結果を一般化することで説明に代えたい．

11-2 節　二重スリット実験のデコヒーレンス

§11-2-1　不確定性関係によるデコヒーレンスの説明

二重スリットの実験では，電子がスクリーンに到達するまでの量子過程の中に，スリット 1 と 2 を通る経路が両方とも含まれる．どちらか一方の経路の寄与だけでは，干渉縞が観測されることを説明できない．量子過程に含まれる古典解の経路を「電子が実際に辿(たど)る道筋」と解釈するならば，この状況は，電子がどちらのスリットを通ったか特定できないことを意味する．しかし，本当に，いかなる方法によっても電子の道筋を特定できないのだろうか？

この問題は，1927 年にブリュッセルで開かれた第 5 回ソルヴェイ会議の折りに，アインシュタインとボーアの間で繰り広げられた論争のテーマとなった．

アインシュタインは，以前にブラウン運動の研究を行った際，1 粒子の統計的分布関数を使って解析した経験があり，その類推から，量子論に現れる波動関数も，電子や光子の統計的な分布関数だと推測していた．ブラウン運動の場合，たとえ具体的な経路がわからなくても，粒子に加わる力の性質を仮定すれば，揺動散逸定理の一種であるアインシュタインの関係式（拡散係数と移動度の関係式）を導くことができる．アインシュタインの立場からすると，量子論の研究者は，統計的な分布関数にすぎない波動関数を

究極的な記述であるかのごとく扱っており，揺動散逸定理のような“実際の”運動にかかわる関係式の探究を怠っているように見えた．そこで，彼らの蒙（もう）を啓（ひら）くべく，電子の運動が波動関数よりも詳しく記述できることを示そうとしたのである．

アインシュタインの議論は次のようなものである．電子は，スリットを通過する際に横方向の力によって運動の向きを変化させるので，スリットの開いたプレートは，その反作用を受けることになる．したがって，プレートを運動できるようにしておけば，その運動状態の変化をもとに，電子の道筋を特定できる可能性がある．

1927 年の論争でアインシュタインが提案したのは，スリット 1 と 2 が開いたプレートを可動にするというセットアップだったが，ここでは，後の議論とのつながりに配慮して，スリット 0 の開いたプレート（プレート 0 とする）が動くものとしよう．電子が通過する際，プレート 0 が図 11-1 の下向きに作用を受けた場合には電子はスリット 1 の方向に，上向きに受けた場合にはスリット 2 の方向に進むと予想されるので，どちらのスリットを通ったかが判明するのではないか？

アインシュタインの提案は，電子を直接観測するのではなく，実験装置の中で電子と相互作用するものを観測対象にしている点で優れている（相互作用する相手を観測するというアイデアは，その後さらに洗練されて，有名なアインシュタイン－ポドルスキー－ローゼンのパラドクスにつながっていく）．もし，プレートを可動にしたことで実験のセットアップが本質的な変更を受けなければ，この方法によって，電子の道筋は特定できないという主張が反駁（はんばく）されることになる．

しかし，昼食会の場でボーアから論争の内容を知らされたハイゼンベルクとパウリは，この議論に欠陥があることに気がついた．2 人が指摘したのは，プレートを可動にすると，不確定性関係によって実験のセットアップが本質的に変わってしまうという点である．

図 11-2 のように，スリット 1 と 2 の間隔を s，2 つのプレートとスクリーンの間隔を L としよう（以下の議論は，定性的な振舞いを調べるものなので，スリットの幅など実験装置の詳細は考慮せず，式の扱いもかなり大ざっぱである）．

干渉縞の明線の間隔 d は，格子間隔 s の回折格子の場合と同じようにして求めることができる．1 次の回折は，隣り合う波の波面が 1 波長分ずれた方向に伝播するので，その方位角 θ は，図 11-3 に描かれているように，$\sin\theta = \lambda/s$ で与えられる．したがって，

$$d \approx L\tan\theta \approx \frac{L\lambda}{s} = \frac{2\pi\hbar L}{ps} \tag{11.3}$$

となる（最後の等式を得るには，ド・ブロイの関係式を使う）．

プレート 0 が固定されているときには，実質的に無限大の質量を持つので，位置が確定し速度がゼロだとしてもかまわない．しかし，プレートを可動にすると，質量は有限

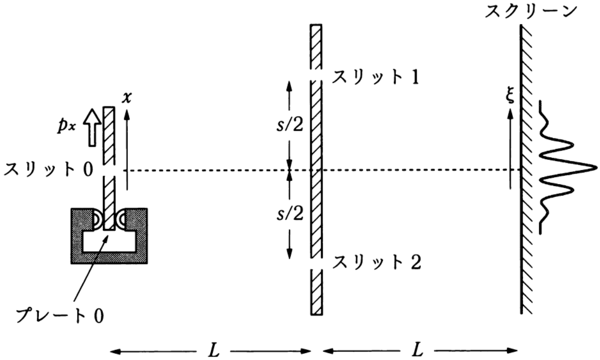


図 11-2　可動スリットによる干渉実験

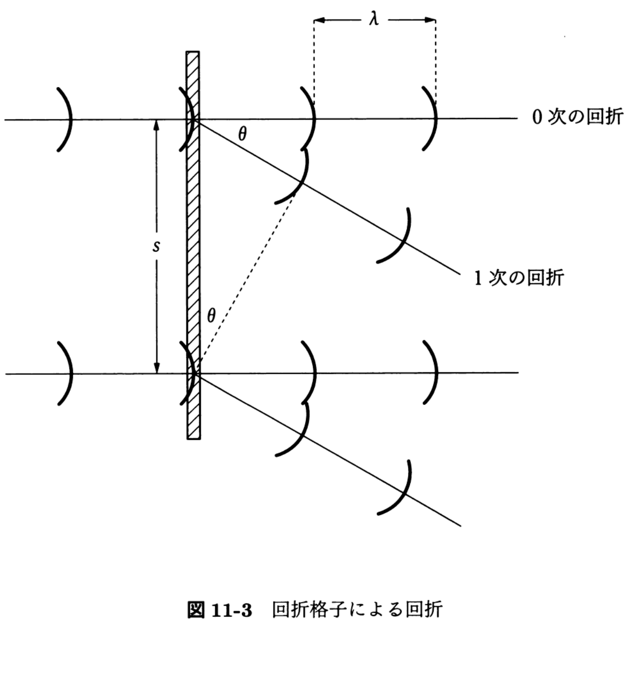


図 11-3　回折格子による回折

だと仮定しなければならないため，位置と運動量の不確定性関係を考慮する必要が生じる．位置を x，運動量を p_x とすると，それぞれ不確定性（標準偏差）Δx と Δp_x は，次の不確定性関係を満たす．

$$\Delta x \Delta p_x \geqq \frac{\hbar}{2} \tag{11.4}$$

スリットの位置が $x = 0$ の場合，電子がスリット 1 か 2 のどちらかにまっすぐ向かうときの x 方向の運動量は $\pm ps/2L$ となる．したがって，電子がどちらを通ったか判別可能となるには，プレートの運動量の不確定性 Δp_x が $ps/2L$ よりも充分に小さくなければならない．この条件を (11.3)，(11.4) 式と組み合わせると，Δx が $d/2\pi$ よりも充分に大きいことが要請される．この結果，プレートの位置が干渉縞の明線の間隔よりも大きな不確定性を持つことになり，スクリーン上には位相のずれた波が到達するため干渉縞は均(なら)されてしまう．つまり，ハイゼンベルクとパウリの反論が正しければ，プレート 0 の運動状態の変化によって電子の道筋が判別できるように装置を変更すると，実験全体のセットアップが変わって，干渉が起きなくなるはずである．これは，スリット 1 と 2 のいずれかを通る量子過程が互いにデコヒーレントになったことを意味する．実は，この議論は不正確であり，§11-2-3 で修正されるが，しばらくは，このまま話を続けよう．

ここで重要なのは，干渉縞が消失する（と予想される）原因はプレート 0 を可動にしたことであり，この装置を使って実際に人間が観測するかどうかとは無関係だという点である．量子力学の記述には，しばしば「…を観測すると…という結果を得る」という言い回しが用いられ，観測が行われない場合の状態がどうなっているかが曖昧なままに残される．書物によっては，人間が観測した瞬間にあたかも物理的な状態が変化するかのような書き方がされており，読者を混乱させることも稀(まれ)ではない．しかし，こうした曖昧な言い回しを使うのは，観測装置の量子力学的な状態を記述するのが数学的に難しいための便宜的な措置にすぎない．もし，二重スリットの実験でプレート 0 が観測装置として機能するならば，干渉縞が消失する原因が「人間による観測」ではなく，「観測装置の状態変化」であることは明らかだろう（ただし，§11-2-3 で詳しく述べるように，二重スリットの実験でも，観測装置の状態をきちんと記述するのはかなり面倒であり，事態はそれほど単純ではない）．

§11-2-2　二重スリット実験の遷移振幅（素朴な議論）

第 2 章で述べたように，量子論において，始状態 P から終状態 Q への遷移振幅 $A(\mathrm{Q};\mathrm{P})$ は，経路積分によって表される．第 2 章 (2.9) 式を改めて書いておこう．

$$A(\mathrm{Q};\mathrm{P}) = \frac{1}{N}\int \prod_t dq(t) \exp\left(iS\left[q(t)\right]/\hbar\right) \tag{11.5}$$

(11.5) 式には途中の時刻 t が含まれているが，実際の計算では t 依存性は打ち消されてしまい，計算結果には両端の時刻しか残らない．以下の議論では，途中の時刻には言及しない．

1 次元運動をする粒子の場合，時刻 t_1 に位置 q_1 にあった粒子が時刻 t_2 に位置 q_2 に遷移するというケースが基本となる．このケースでは，経路積分を実際に遂行することが可能であり，遷移振幅は次式で与えられることが知られている．

$$A(q_2, t_2; q_1, t_1) = \frac{1}{N} \exp\left(\frac{im(q_2 - q_1)^2}{2\hbar(t_2 - t_1)}\right)$$

右辺を終端の t_2 と q_2 の関数と見なした場合，遷移振幅 A はシュレディンガー方程式を満たすことが知られている．すなわち，終端座標の関数として表した遷移振幅は，始状態を特定した波動関数と同じものである．

両端の時刻を使わない一般の場合に拡張することも容易である．ここでは，結果だけを書いておこう．始状態 P と終状態 Q の波動関数を $\Psi_{\mathrm{P}}(q)$，$\Psi_{\mathrm{Q}}(q)$ と表すと，P から Q への遷移振幅は，次のようになる．

$$A(\mathrm{Q};\mathrm{P}) = \int dq_2 \int dq_1 \Psi_{\mathrm{Q}}(q_2) A(q_2, t_2; q_1, t_1) \Psi_{\mathrm{P}}(q_1) \tag{11.6}$$

もっとも，この式のままでは変数が多くて煩わしいので，積分を含めた右辺を，$\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{P}\rangle$ と略記することにしよう．この記法を用いると，遷移振幅の式がかなり見やすくなる．

この略記法は，ディラックが考案したブラケット記法に基づいている．ディラックの理論では，$|\mathrm{P}\rangle$ が量子論的な状態を表すヒルベルト空間のベクトルを，$\langle \mathrm{P}|$ がその随伴ベクトル（複素数における複素共役量をヒルベルト空間に拡張したもの）を表し，$\langle \mathrm{Q}|\mathrm{P}\rangle$ は 2 つのベクトルの内積である．また，A はヒルベルト空間のベクトルに作用する時間発展の演算子となる．粒子が位置 q に存在する状態（位置演算子 q の固有状態）を $|q\rangle$ と書くことにすると，波動関数 $\Psi_P(q)$ は $\langle q|\mathrm{P}\rangle$ となる．位置の固有状態が完全直交系を構成することより，

$$1 = \int dq |q\rangle\langle q|$$

となるので，

$$\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{P}\rangle = \int dq_2 \int dq_1 \langle \mathrm{Q}|q_2\rangle\langle q_2|A|q_1\rangle\langle q_1|\mathrm{P}\rangle$$

という関係式が成立する．これが，(11.6) 式をブラケット記法で書き直したものになる．

始状態 P から終状態 Q に遷移する確率は，遷移振幅の絶対値の 2 乗として定義される．全確率（P から任意の状態に遷移する確率）が 1 になるという条件によって，(11.5) 式の定数 N が決定される．

さて，二重スリット実験に関して，遷移振幅を考えてみよう（この場合，(11.5) 式の経路積分において，位置変数を 3 次元に拡張する必要がある）．始状態 P として一定の運動量 p を持つ電子が照射される状態を，終状態 Q としてスクリーン上の特定の位置に電子が到達する状態を選ぶ．プレート 0 が固定されている場合，経路がスリット 1 と 2 のいずれを通るかによって，(11.5) 式の遷移確率を A_1 と A_2 に分けると，P から Q に遷移する確率は，

$$
\begin{aligned}
&|\langle \mathrm{Q}|A_1 + A_2|\mathrm{P}\rangle|^2 \\
&\quad = |\langle \mathrm{Q}|A_1|\mathrm{P}\rangle|^2 + |\langle \mathrm{Q}|A_2|\mathrm{P}\rangle|^2 \\
&\quad + (\langle \mathrm{Q}|A_1|\mathrm{P}\rangle\langle \mathrm{Q}|A_2|\mathrm{P}\rangle^* + \langle \mathrm{Q}|A_1|\mathrm{P}\rangle^*\langle \mathrm{Q}|A_2|\mathrm{P}\rangle)
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

となる．この式で，右辺第 1 項と第 2 項は，それぞれスリット 1 およびスリット 2 を通過する経路の寄与だと解釈することができるが，古典論によって解釈しようがないのが (　) で括った第 3 項である．この第 3 項が干渉を表す項であり，量子効果の現れである．干渉項が存在するため，遷移確率を，それぞれのスリットを通過する確率の和として表すことはできない．

しかし，プレート 0 を可動にすると，この式では遷移振幅を表すことができない．電子がスリット 0 を通過したとき，プレート 0 の運動状態も変わるので，その寄与も考慮する必要がある．この段階では，プレート 0 の始状態が何であるかを具体的に書き表すことはせず，単に σ と記しておこう．電子が通過した後に，プレート 0 は図 11-2 の上向きか下向きに運動量を持っている．この運動量を，ド・ブロイの関係式を使って波数で表すことにしよう．実際には，波数として正負のさまざまな値が可能だが，話を簡単にするために，k' を特定の正の値とし，波数は $+k'$ か $-k'$ のどちらかの値だけを取るものとする．波数が $+k'$ になる場合，遷移振幅は次の式で与えられる．

$$
\langle \mathrm{Q}, +k'|A|\mathrm{P}, \sigma\rangle \tag{11.8}
$$

この遷移振幅の値をきちんと求めるには，(11.5) 式に現れる作用として，電子だけではなくプレート 0 の運動と，両者の相互作用を含むものを考えなければならない．ただし，厳密な計算をしても煩わしいだけで見通しが悪いので，スリット 0 を通過する瞬間

に x 方向の運動量のやりとりだけが行われ，プレート 0 は波数 $+k'$ を持ち，電子は運動量保存則に従った中間状態 R_+ に変化するものと考える（取りあえず，中間状態は 1 つに限ると仮定するが，後で修正が必要となる）．そうすると，(11.8) 式の遷移振幅は，電子が状態 P から状態 R_+ へ，プレート 0 が状態 σ から波数 $+k'$ の状態へ遷移する瞬間的な相互作用の寄与と，電子が中間状態 R_+ から終状態 Q に遷移する電子だけの運動の寄与の積に書き換えられる．

$$\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{R}_+\rangle\langle \mathrm{R}_+, +k'|A|\mathrm{P},\sigma\rangle \tag{11.9}$$

遷移確率は，この絶対値を 2 乗したものになる．同じように，プレート 0 の運動量が $-k'$ となり，電子が中間状態 R_- に変化する遷移を考えることもできる．これらをまとめると，始状態 P,σ にあった電子とプレート 0 が，終状態 $\mathrm{Q},+k'$ または $\mathrm{Q},-k'$ のどちらかになる遷移確率は，次式で与えられる．

$$|\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{R}_+\rangle\langle \mathrm{R}_+, +k'|A|\mathrm{P},\sigma\rangle|^2 + |\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{R}_-\rangle\langle \mathrm{R}_-, -k'|A|\mathrm{P},\sigma\rangle|^2 \tag{11.10}$$

> (11.10) 式が遷移確率と見なせるのは，プレート 0 の運動量が $\pm k'$ のいずれかというだけでなく，その 2 つの状態が互いに干渉しあわないことを示す必要がある．ただし，ここでは電子の状態の干渉を考えることが主題であり，電子とプレート双方の干渉を考えると混乱を招きかねないので，後者については取り上げない．プレート 0 の異なる状態が干渉しないようにする最も簡単な方法は，その運動量を正確な観測装置を使って観測することである．

ここで，アインシュタインが考えたように，プレート 0 が上向きの波数 $+k'$ を持つならば電子は必ずスリット 2 の方向に曲がり，$-k'$ ならばスリット 1 の方向に曲がると仮定してみよう．この仮定は実は誤っており，§11-2-3 で修正されるが，仮に正しいとすると，(11.10) 式の $\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{R}_\pm\rangle$ という因子には，スリット 1 ないし 2 の一方を通る経路だけが寄与することになり，(11.7) 式に見られるような干渉項を含んでいないので，古典解ごとにデコヒーレンスが実現されたと見なせる．この場合，電子がスクリーンに到達する確率は，スリット 1 を通る確率とスリット 2 を通る確率の和として表され，形式的には，古典論に現れる統計的な確率の法則（例えば，ブラウン運動する粒子が，2 つのスリットのどちらかを通っていくときの確率が，それぞれのスリットを通る確率の和になるという法則）と同じである．したがって，古典論と同じように，「スリット 1 を通る過程」と「スリット 2 を通る過程」が排他的であり，どちらか一方だけが実現されると考えても，何の問題も生じないはずである．

残念ながら，こうした素朴な議論は正しくない．具体的な波動関数を使ってきちんと計算すると，(11.10) 式の $\langle \mathrm{Q}|A|\mathrm{R}_{\pm}\rangle$ には，2 つのスリットを通る経路の寄与が同時に含まれることがわかり，完全なデコヒーレンスは実現されず，排他的な量子過程にならないからである．次節では，もう少し現実的な議論によって，干渉縞がどのように変わるかを見ることにしよう．

§11-2-3　二重スリット実験の遷移振幅（より現実的な議論）

プレート 0 を可動にして電子が通過した後の運動量を測定したとしても，通過前のプレート 0 の運動量がわからないため，電子に与えた運動量を正確に決定することはできない．このため，スリット 1 と 2 のどちらを通過するかは完全にはわからず，両方のスリットを通過する経路の寄与が遷移振幅に含まれることになって，干渉縞が消えずに残ってしまう．コヒーレンスが失われるのではなく，弱まるだけなのである．

実際に何が起きるかを調べるには，プレート 0 の波動関数を具体的に書き表す必要がある．位置と運動量の平均値が 0 で，可能な限り小さな不確定性を持つようにした方が議論の限界がはっきりするので，波動関数 $\Psi(x)$ としては，次の形のものを選ぶ（これは，プレート 0 をバネに取り付けて調和振動させたときの基底状態に相当する）．

$$\Psi(x) = \pi^{-1/4}\sigma^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \tag{11.11}$$

波動関数の後ろに記した Δx の式は，位置の不確定性（標準偏差）を表す．

(11.11) 式をフーリエ変換すると，波数表示の波動関数になる．

$$\Psi(k) = \pi^{-1/4}\sigma^{1/2}\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right), \qquad \Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{11.12}$$

ただし，波数 k はド・ブロイの関係式 $p_x = \hbar k$ によって，x 軸方向の運動量 p_x と結びつけられる．

> この形の波動関数を用いた議論は，ウータースとズレクの 1979 年の論文で展開されており，以下の議論は，その内容をもとにしている．

この波動関数による位置と運動量の不確定性の積は，(11.4) 式で等式が成り立つ場合に当たるので，可能な限り小さな不確定性を持つという要求に合致する．$\sigma \to 0$ とすると位置が確定した状態に，$\sigma \to \infty$ とすると運動量が確定した状態に漸近する．

(11.11) 式（あるいは，同じことだが (11.12) 式）で表される状態が，§11-2-2 の状態 σ になる．この波動関数で表される状態のプレート 0 が，電子に x 軸方向の運動量を与え

て，波数 k' の状態に遷移するものとしよう．二重スリット実験では，プレートの位置の不確定性はスリット 1 と 2 の間隔（図 11-2 の s）よりも充分に小さくなるように調整されるので，電子の運動方向を考える場合には，$x=0$ と置いてかまわない．したがって，電子がスリット 1（またはスリット 2）の位置に達するには，スリット 0 を通過した後の電子の波数が $+\kappa_0$（または $-\kappa_0$） でなければならない．ただし，

$$\kappa_0 = \frac{sp}{2L\hbar} \tag{11.13}$$

である．電子が通過する前のプレート 0 の波数を k とすると，通過後のプレート 0 の波数 k' が $k-\kappa_0$ ならば電子はスリット 1 を，$k+\kappa_0$ ならばスリット 2 を通過することになる．波数 k' を測定する場合，スリット 1 を通る経路にはプレート 0 の波動関数 $\Psi(k'+\kappa_0)$ が，スリット 2 を通る経路には $\Psi(k'-\kappa_0)$ が掛かり，それに伴って，（あまり物理学的な表現ではないが）スリットの“通りやすさ”に差が生じる．

アインシュタインの提案では，k' が正ならば，電子が x 軸の負の向きに運動量を受け取ってスリット 2 に到達するとされた．しかし，k' が正であっても，電子通過前にプレート 0 が $k'=k-\kappa_0>0$ という式を満たす——すなわち，κ_0 より大きい——正の波数 k を持っていれば，電子はスリット 1 に向かう．スリット 1 と 2 の近傍で電子を観測する場合を考えよう．このとき，k' が正で電子が（スリット 2 ではなく）スリット 1 に向かう相対頻度は，(11.12) 式の波動関数を使えば，次式で与えられる．

$$\int_{\kappa_0}^{\infty} dk\,|\Psi(k)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sigma\kappa_0}^{\infty} d\eta e^{-\eta^2} = \frac{1}{2}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\sigma\kappa_0\right)\right\} \tag{11.14}$$

ただし，erf(　) は誤差関数と呼ばれる特殊関数で，多くの数学公式集に数表の形で関数値が与えられている．

(11.14) 式に現れる $\sigma\kappa_0$ は，実験のセットアップによって決定される．例えば，$\sigma\kappa_0=0.4796$ の場合，$\mathrm{erf}(0.4796)=0.5$ なので，電子通過後にプレート 0 がプラスの運動量を持っていたとすると，何度も実験を繰り返してスリット 1 か 2 を通過する電子を測定したとき，75% の電子はスリット 2 に向かい，25% の電子はスリット 1 に向かうことになる．$\sigma\kappa_0=\infty$ のときは，電子が通過する前のプレート 0 の運動量が 0 に確定したことに伴って，全ての電子がスリット 2 に向かい，デコヒーレンスが完全になる．しかし，$\sigma\kappa_0$ が有限である限り，デコヒーレンスは不完全であり，電子がどちらのスリットを通りやすいかは言えても，道筋を確定することはできない．可動にしたプレート 0 は，観測装置としては誤差が大きいとも言えるだろう．

プレート 0 の波数 k' の値を測定しても，事情はさして変わらない．プレート 0 と電子の運動状態を，これまで使ってきたのと同じ波数で表すと，(11.9) 式の遷移振幅は，

$$\sum_{\kappa=\pm\kappa_0}\int dk\langle \mathrm{Q}|A|\kappa\rangle\langle\kappa,k'|A|\mathrm{P},k\rangle\Psi(k)$$

となる（運動量の保存則より，k の値は $k=k'+\kappa$ に限られる）．電子の中間状態として，波数の符号が異なる 2 つの状態が含まれるため，全体の絶対値を 2 乗した遷移確率には，この 2 つの干渉項が現れる．

遷移確率に干渉項が現れることに対応して，スクリーン上には干渉縞が生じる．このときの干渉パターンは，光学におけるヤングの実験と同じように求めることができる．まず，スリット 0 が $x=0$ の位置にある場合を考えよう．スクリーンの中心位置からの座標を（図 11-2 に描いたように）ξ としたとき，$x=0$ のスリット 0 からスリット 1 と 2 のいずれかを通ってスクリーンに到達する電子の経路差は，

$$\sqrt{L^2+\left(\frac{s}{2}+\xi\right)^2}-\sqrt{L^2+\left(\frac{s}{2}-\xi\right)^2}\approx\frac{s\xi}{L}$$

となる（これは，光学におけるヤングの実験の式と等しい）．(11.1)，(11.2) 式より，それぞれのスリットからスクリーンに達する電子の位相差は，$ps\xi/\hbar L=2\kappa_0\xi$ となる（κ_0 は (11.13) 式で与えられる）．したがって，干渉縞の強弱のパターンは，次の因子 $I(\xi)$ によって決定される．

$$I(\xi)=\frac{1}{2}\left|1+\exp(i2\kappa_0\xi)\right|^2=1+\cos 2\kappa_0\xi \tag{11.15}$$

干渉縞のパターンには，このほかにも，スリットの幅などに依存する緩やかな強度変化を表す因子が付くが，ここでは考慮しない．

スリット 0 の位置を 0 から一般の x に変えると，干渉パターンの因子は，(11.15) 式の $I(\xi)$ を $I(\xi+x)$ で置き換えたものになる（簡単な式になるのは，2 つのプレートの間隔と，プレート 1 とスクリーンの間隔を等しく L にしたためだが，この間隔を変えても，ほんの少し式が変わるだけで本質的な違いは生じない）．

スリット 0 の位置が x になる確率は，(11.11) 式の波動関数 $\Psi(x)$ を使えば，$|\Psi(x)|^2$ で与えられる．この確率を使うと，干渉縞のパターンは次式で決定される．

$$\int dx\,|\Psi(x)|^2\left\{1+\cos 2\kappa_0(x+\xi)\right\}=1+e^{-\sigma^2\kappa_0^2}\cos 2\kappa_0\xi \tag{11.16}$$

干渉縞のパターンを求める際に波動関数 $\Psi(x)$ が使えるケースとしては，電子が通過した直後にスリット 0 の位置を測定することが考えられる．スリット 0 の位置が x だとわかれば，その位置から電子がプレート 2 の方向に飛んでいったことになるので，干渉パターンの因子は $I(\xi+x)$ となる．一方，電子の通過によってプレートの位置が飛

躍することはないので，位置の測定結果は，通過前の波動関数 $\Psi(x)$ を使って予測できる．したがって，実験を何度も繰り返して得られる干渉パターンは，(11.16) 式になるはずである．

この議論に対しては，当然，批判が出てくるだろう．電子の道筋を決定するための観測装置としてプレート 0 を利用するためには，位置ではなく運動量を測定しなければならない．運動量を測定すると，位置を測定した場合とは，干渉パターンが変化するのではないか？

こうした批判については，ウータースとズレクの論文で詳しく分析されている．結論だけ言えば，電子が通過した後で何を測定しようと，干渉パターンは変化しない．プレート 0 に関する測定結果と，スクリーンに到達した電子の位置に関して相関を求めると，新たな情報が得られるが，事後の測定によって因果律に反する現象が起きることはない．

(11.16) 式からわかるように，干渉縞の明瞭さは，実験のセットアップで定まる $\sigma\kappa_0$ に依存する．最弱値に対する最強値の比は，(11.16) 式から

$$R = \frac{1 + e^{-\sigma^2\kappa_0^2}}{1 - e^{-\sigma^2\kappa_0^2}}$$

となる． $\sigma\kappa_0 = 0.4796$ と置いてみると，$R = 8.7$ となり，かなりはっきりした干渉縞が観測される．先に見たように，このとき，プレート 0 の運動量の正負を測定すれば，75% の正確さでスリット 1 と 2 のどちらを通過するかが判定できる．$\sigma\kappa_0 = 0.9$ の場合，$\mathrm{erf}\,(0.9) = 0.797$ なので正確さは 90% となるが，それでも $R = 3.2$ なので，干渉縞は充分に確認できる．アインシュタインの提案をハイゼンベルクとパウリが反論したときの議論では，電子の道筋がわかる場合には干渉縞が現れないはずだった．しかし，実際には，この例が示すように，ある誤差範囲で電子の道筋を判定すると，誤差に応じて干渉縞がなまるだけである．どちらのスリットを通過したかが全くわからない $\sigma\kappa_0 = 0$ の場合，干渉縞は完全で暗線の部分に電子は到達せず，スリット 1 と 2 のどちらを通過したかが確定できる $\sigma\kappa_0 = \infty$ ならば，デコヒーレンスが実現されて干渉縞は消失する．一般の場合には，コヒーレンスが弱まって干渉縞がなまり，それとともに，遷移確率の計算に現れる経路ごとの重みにプレート 0 の波動関数が加わる．

§11-2-4　完全なデコヒーレンスは起きるか？

二重スリット実験の結果は，きわめて示唆的である．量子論に関する古い解説書には，「粒子性と波動性は相補的であり，一方が顕現すると他方の性質は観測できない」と書かれていることもあるが，これは不正確な記述である．実際には，二重スリット実験

の結果に示されるように，波動性の現れである干渉縞を観測すると同時に，粒子の道筋をある程度まで判定することが可能である．また，コヒーレンスが変化するのは，道筋を判定するための観測装置（可動なプレート 0）を設置した結果であり，実際に人間が観測を行うかどうかとは無関係である．

衝突するとコヒーレンスが減殺されるという性質は，一般的に成り立つ．具体的な理論ができているのが，無数の振動子と衝突する調和振動子のケースである．

第 2 章 2-3 節で見たように，調和振動子が孤立して存在する場合，定常状態に達したときの波動関数は，ガウス関数（$\exp\left(-\alpha x^2\right)$ という形式の関数）を引数で微分したものを使って表されるが，これは，さまざまな位相と振幅を持つ振動が干渉しあって形成された共鳴パターンと見なすことができる．こうした共鳴パターンが実現されるのは，せいぜい，分子や結晶格子の振動であって，巨視的なバネではうまくいかない．その理由は，巨視的なバネが単純な振動子ではなく，内部自由度がきわめて多い複雑なシステムだからである．巨視的なバネのモデルとして，無数に存在する小さな（衝突の際の衝撃が弱い）振動子と衝突を繰り返す調和振動子を考えてみよう．このケースでは，二重スリット実験における電子とプレートの衝突と同じように，調和振動子が周囲の振動子と衝突するたびに，位相や振幅の異なる振動の間のコヒーレンスが弱まっていく．その結果，こうした調和振動子では，さまざまな振動状態の間の干渉によって形成される共鳴パターンは生じない．その代わり，振幅がしだいに小さくなる減衰振動で表される振舞いをする．これは，摩擦項のある調和振動子の古典解であり，さまざまな量子過程の間のコヒーレンスが失われることによって，1 つの古典解の振舞いが増強されるのである．

こうしたデコヒーレンスは，あくまで実用上そう考えてかまわないという程度の近似であり，完全ではない．二重スリット実験の解析が示すように，コヒーレンスはかなりしぶとく残り，どちらのスリットを通ったかを高い正確さで判定できる場合でも，干渉縞ははっきりと現れる．

しかし，遷移する状態が離散的な場合は，デコヒーレンスが簡単に実現されることもある．例として，真空中に 2 個の原子を静止させ，これを使って二重スリットと同じ干渉実験をするケースを取り上げたい．原子がエネルギー準位 E_1 の基底状態と E_2 の励起状態を持つ場合，$\omega = \left(E_1 - E_2\right)/\hbar$ という角振動数を持つ光子を照射すると，原子がいったん励起された後に，同じ角振動数の光を放射して基底状態に戻る．2 つの原子からの散乱光を重ねて干渉させると，二重スリット実験と同様の干渉縞が現れる．ここで，それぞれのエネルギー準位に，磁気量子数 m が 1 だけ異なる状態が縮退しているとすると，原子の磁気量子数 m が変化するかどうかに応じて，散乱光は，入射光と同じ偏光状態のものと異なる偏光状態のものになる（図 11-4）．

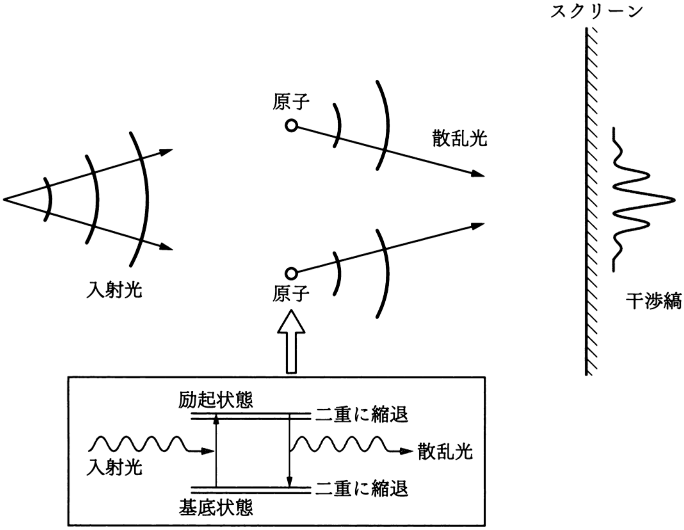


図 11-4　原子を使った二重スリット実験

光子を 1 個ずつ照射する場合，散乱光の偏光状態が入射光と同じならば，散乱後の原子の状態は散乱前と変わらないので，どちらの原子が光子を散乱したか判定できない．しかし，偏光状態が入射光と異なっているときは，光子を散乱した原子は磁気量子数 m が異なった状態に変化しているので，どちらが散乱したかが判定できる．そこで，散乱光の偏光状態を特定できる観測装置（ブリュースター角を調整することにより，特定の偏光状態にある光だけを反射するようにしたガラス板など）を用意して，到達した光子の偏光状態と位置を記録する．1993 年にワインランドらが行った実験によると，偏光状態が変化しない光子のデータだけを集めると干渉縞が現れるが，偏光状態が変化した光子のデータだけを集めると干渉縞は誤差範囲内で完全に消失した．この場合，原子は磁気量子数が変化し，光子は偏光状態が変化したので，どちらも，離散的な状態変化が起きている．このように，離散的な状態変化によって光子の通った道筋を確実に判定できるようにすると，コヒーレンスが失われる．

一般的に言って，連続的に変化するような変数だけでは，一般にデコヒーレンスは不完全なままにとどまるが，離散的な状態変化が関与すると，ほぼ完全なデコヒーレンス

が起きることもある．

11-3 節　解釈問題と量子宇宙

§11-3-1　デコヒーレンス解釈

量子論は，古典論と異なって，始状態が与えられても，その後にどのような物理現象が起きるかを確定することができない．かつては，実際に何が起きたかを確定するには，観測を行うしかないと考えられていた．しかし，それでは，観測が行えない対象を量子論で記述するのが困難になり，物理学理論として汎用性に欠ける．

例として，宇宙の初期に起きるスカラー場の凝縮について考えてみよう．素粒子の標準理論では，ビッグバン後に空間が膨張して温度が低下する際，ヒッグス場が凝縮して多くの素粒子に質量を与えたと想定されている．ヒッグス場のポテンシャルとしては，対称性の破れに関する理論的な要請を満たす範囲で最も簡単なものが選ばれることが多いが，極小値がいくつもあるようなポテンシャルを選ぶことも可能である．こうした場合でも，「ある極小値に落ち込んで場の値が一定になる」と説明されるのが一般的である．だが，この振舞いはあくまで古典解として導かれたものであり，量子論では，どの極小値で安定してもおかしくない．誰も観測していない初期宇宙で，いくつもある極小値のどれに落ち着いたかを，どうやって確定できるのか？

ここで暗黙のうちに仮定されているのが，デコヒーレンスの考えである．スカラー場が異なる極小値に落ち着くには温度低下が必要だが，その間に環境と相互作用することになる．これは，無数の振動子と衝突する巨視的なバネと同様のケースであり，異なる古典解の間のコヒーレンスが失われる．結果的に，ポテンシャルの極小値で安定した状態同士は，量子論的な干渉を起こさない．仮にポテンシャルの極小値が A と B の 2 つだとすると，遷移確率は，「極小値 A に落ち着いた状態を経由する量子過程の確率」と「極小値 B に落ち着いた状態を経由する量子過程の確率」の和として与えられる．何かが起きる確率が個別的な過程の確率の和になることは，形式的に古典論における確率と同じなので，宇宙は，極小値 A か B のどちらか一方になったと見なすことができる．

この考え方を一般化しよう．始状態を与えたときに起こり得る量子過程全体が，互いにデコヒーレントな量子過程に分割され，全遷移確率が各量子過程ごとの確率の和になるならば，それぞれの量子過程は排他的な別個の過程であり，そのうちの 1 つが実現されているものとしてかまわない．量子論とは，互いにデコヒーレントな量子過程の実現確率を決める理論だと解釈することもできる．こうした解釈を，仮に「**デコヒーレンス**

解釈」と呼ぶことにする．

> 「ある状態を経由する」とは，量子論的には，その状態に射影する射影演算子を状態ベクトルに作用させることに相当する．したがって，特定の状態を経由する量子過程は，射影演算子と（始状態・終状態を表す）密度演算子を使って定式化することができる．こうした定式化を採用し，互いにデコヒーレントな量子過程（あるいは，「量子論的な歴史」）に基づく解釈を提唱したのが，1984 年のグリフィスの論文である．この方法論は，80〜90 年代に掛けて，オムネスやゲルマン - ハートルによって練り上げられた．ただし，論点は著者によって微妙に異なっており，グリフィスが「デコヒーレンスが起きる」ことを前提として量子過程を古典論の言葉で表現しようとしているのに対して，ゲルマン - ハートルは，デコヒーレンスが不完全であることを議論している．

素粒子実験では，検出器をずらりと並べることで素粒子がどこに到達したかを観測しているが，こうした装置を使って，電子の位置を測定する場合を考えてみよう．位置の観測装置を充分精密にして，電子が位置 x に到達すると，観測装置の量子状態が σ から $R(x)$ に変わるものとする．うっかりすると，「電子が位置 x に観測される」ことは，そのまま「観測装置の状態が $R(x)$ に変化する」ことと一致すると思われるかもしれないが，そうではない．異なる位置に対応する 2 つの状態 $R(x_i)$ と $R(x_j)$ が互いに干渉する可能性があるからである．二重スリット実験で，デコヒーレンスが完全でない場合に，スリット 1 とスリット 2 のどちらを通ったかが判定できないのと同じように，観測装置の状態が干渉するならば，「状態が $R(x)$ に変化する」とは言えない．完全にデコヒーレントになった場合にのみ，（デコヒーレントな二重スリット実験で「電子はスリット 1 または 2 のどちらか一方を通った」と言えるのと同様に）「観測装置の状態が $R(x)$ に変化した」と主張できるのである．

巨視的な観測装置の場合，異なる観測結果に対応する状態が干渉するとは考えにくい．しかし，微視的な観測装置ならば，現実に干渉することが実験的に示されている（ワインランドらによる 1996 年の実験）．

原子の状態に 2 つのエネルギー準位 S_1 と S_2 があり，レーザービームを照射することで状態間を遷移させられるものとする．ビーム照射後，周波数を調整した振動磁場を加えると，原子の状態が S_1 のときには振動状態 R_1 に，S_2 のときには振動状態 R_2 になるようにすることができる．したがって，原子が S_1 と S_2 のどちらにあるかは，振動磁場を加えたときの振動状態を調べれば判定できるように思われる．しかし，実際には，充分に制御された実験を行うと，R_1 と R_2 が重ね合わされて干渉しあう状態が実現できる．先のシュレディンガーの猫のケースで，放射性崩壊が起きた状態と起きていない

状態をそれぞれ S_1 と S_2，猫が死んだ状態と生きた状態を R_1 と R_2 とすれば，R_1 と R_2 が重なった状態は，猫が死んでいると同時に生きている状態に相当する．レーザービームを使った実験は，1 つの原子で「シュレディンガーの猫状態」を作り出したことになる．

> ブラケット記法を使うと，この状態は，
>
> $$\frac{1}{2}\left(|R_1\rangle|S_1\rangle + |R_2\rangle|S_2\rangle\right)$$
>
> という式で表される．このように，相互作用している 2 つの部分（上の例では，外殻電子のエネルギー状態と原子全体の集団運動の状態）に関して（R と S のような）特定のペアが結びつくような状況を作ったとき，ペアの和として表される状態を，量子もつれ（quantum entanglement）と呼ぶ．量子もつれは，量子テレポーテーションや量子暗号など量子論を応用する最先端領域で重要な役割を果たしている．

観測装置において完全なデコヒーレンスが起きるならば，デコヒーレンス解釈は，観測の結果を確率を使って予測する伝統的なコペンハーゲン解釈と一致する（素粒子の位置を観測する実験で言えば，デコヒーレンスが起きる場合，素粒子が位置 x に到達することと，観測装置が状態 $R(x)$ に変化することが等価になる）．さらに，観測を行わない場合でも，互いにデコヒーレントな量子過程の確率を求めることができるので，コペンハーゲン解釈の場合よりも，量子論の適用範囲が拡張されている．

ただし，完全なデコヒーレンスが起きることは一般に保証されていない．単純な装置でコヒーレンスがかなりしぶとく残ることは二重スリット実験の解析で示した通りであり，また，微視的な観測装置では，1 原子による「シュレディンガーの猫状態」のように，デコヒーレンスが起きないケースもある．

その一方で，自由度が多くなると，コヒーレントな重ね合わせ状態は簡単に壊れることが知られている．こうした現象は，巨視的なシステムだけでなく，マクロとミクロの中間領域であるメソスコピック領域でも見られる．例えば，量子コンピュータでは，コヒーレンスを保ちながら並列計算を実現することが目標だが，実験的に作られたシステムでは，外部からのさまざまなノイズが並列になるべき状態をすぐにデコヒーレントにしてしまい，量子コンピュータの実現を阻んでいる．

完全なデコヒーレンスは保証できないが，メソスコピック領域より大きな（正確に言うと，多くの自由度を持つ）システムでは，実質的なデコヒーレンスが起きると見なして良い．このため，デコヒーレンス解釈を採用する多くの論者は，完全なデコヒーレントが起きるかどうかはあまり気にしないで，押し通してしまう．巨視的なシステムなら

ば，それでも実用上の問題は起きない．

§11-3-2　多世界解釈との比較

実用上の問題はないという言い訳に反発を感じる研究者も，当然のことながら少なくない．わずかでも干渉が残っているならば，1 つの量子過程だけが実現されるとは言えないはずである．この考えを徹底させると，実現される／されないという区別を行うことが困難になる．経路積分の領域には大きな寄与を与える古典解がいくつも含まれるが，その中のどれか 1 つが実現される過程を表すという訳ではなく，全てが実現されると考えざるを得ない．これが，多世界解釈である．

多世界解釈の特徴は，数学的な曖昧さを許さないという点である．無数の振動子と衝突する調和振動子の場合，衝突を何回も繰り返す過程で実質的なデコヒーレンスが漸近的に実現されるが，どの段階でデコヒーレントになったと見なせるかを判定する基準はなく，議論に曖昧さがつきまとう．多世界解釈では，そもそも完全にデコヒーレントにはならないとするので，こうした曖昧さがない．多世界解釈を信奉する人には超ひも理論の研究者が多いが，数学的に不備な部分を排除するという方法論が超ひも理論と共通するせいかもしれない．

デコヒーレンス解釈が数学的に厳密ではないという批判に対しては，いくつかの反論が可能である．例えば，（第 7 章で紹介した）ループ量子重力理論など，いくつかの量子重力理論では，時間や空間に最小の単位があるとされ，その結果として全ての物理量が連続的ではなく離散的になる．こうした理論では，「充分に小さくなる」とは「厳密にゼロになる」ことと等価であり，干渉項は，単に小さくなるだけではなく，実際にゼロになって完全なデコヒーレントが実現されると見なせる．しかし，量子重力理論が完成していない以上，こうした反論も，単なる期待以上のものではない．

デコヒーレンス解釈を採用する人は，多世界解釈に対して，「世界が多すぎる」と批判する．量子揺らぎの中に併存する複数の世界として，「第 2 次世界大戦で連合国が勝利した世界と枢軸国が勝利した世界」のような歴史的な “if” のケースを思い描くと SF 的で面白いが，実際には，異世界の大部分はほとんど差異のないつまらないものである．例えば，調和振動子が無数の振動子と衝突するケースでは，振幅や位相の異なる減衰振動が全て異世界となる．化学反応が 1 つ違うだけで世界は分岐することになり，とてつもない数の世界が次々と生み出されていく．こうした世界が全て実在すると考えるのはいささか常識外れで，あくまで起こり得る可能性を示しているだけだと解釈するのが良さそうにも思える．もっとも，これまでの章で見てきたように，宇宙論という学問自体が常識外れなのだが．

§11-3-3　量子過程としての宇宙

最先端物理学を紹介する啓蒙書には，多世界解釈が量子論の自然な帰結だと紹介されていることが少なくないが，それは，こうした啓蒙書の執筆者に超ひも理論の研究者が多いせいであって，物理学界全体を見渡すと，デコヒーレンス解釈の方が主流だと思われる．とは言っても，解釈問題が専門でない場合は，プロの物理学者であっても，「巨視的に区別できる量子状態は干渉しないはずだ」という程度の大ざっぱな認識しか持っていないことが多く，深く検討した上でデコヒーレンス解釈に軍配を揚げている訳ではなさそうだ．2 つの解釈のどちらが正しいのか，全く別の解釈が登場して受け容れられることになるのか，あるいは，量子論を超える新たな理論が構築されるのか——今の段階では，何とも言えない．ここでは，学界の主流になっているという点を尊重して，デコヒーレンス解釈を採用した場合，宇宙全体がどのように記述されるかを見てみたい．

(1) 非決定性　物理学とは，「少数の法則」と「限られたデータ」だけを使って，あらゆる物理現象を再構築しようとする試みである．古典論が良い近似となるような物理現象では，最初の状態が与えられると，その後の時間変化は決定論的に進行していく．この状況を定式化するに当たって，物理学者は，「少数の法則」として厳密に成り立つ微分方程式を，「限られたデータ」として境界条件を採用し，「与えられた境界条件の下で微分方程式の解が一意的に決定される」という形で，物理現象の決定論的な性質を解明して見せた．

ところが，量子論で記述される物理現象になると，厳密な方程式に従わずに確率的な振舞いを示す．従来は，観測によってデータを得るたびにシュレディンガー方程式の境界条件を変更することで，この状況に対応していたが，これでは方法論的な首尾一貫性に欠ける．デコヒーレンス解釈では，現象全体を 1 つの量子過程と解釈することで，いちいち境界条件を変更するという場当たり的な方法論を採らなくても済む．しかし，確定可能な境界条件（通常は初期条件）が全て与えられても，どの量子過程が実現されるかは決定できないので，観測でデータを補充しなければならない．

それでは，自然界は，どのようにして 1 つの量子過程を選択するのだろうか？　ここで正しく認識しておくべきことは，「物理現象が生起する段階で選択される」というアイデアを素朴に採用すると，相対論と矛盾するという点である．第 1 章で述べたように，相対論では「現在」という時刻を指定することができないので，相対論的な量子過程は，過去から未来にわたる既定の過程として与えられなければならない．「物理現象が生起する」というのは，人間の目で見た話であって，自然界の実状ではない．とすると，特定の量子過程を選び出す何らかの“きっかけ”が，過去から未来にわたる全時空に散らばっていると考えるしかないだろう．量子論の枠組みでは，こうした“きっかけ”を定

式化することができないので，観測に頼らざるを得ないのである．

誤解のないように言っておくが，量子論におけるシュレディンガー方程式そのものは，相対論と矛盾していない．一般的なシュレディンガー方程式は，演算子として定義したハミルトニアンを H にハットを付けて表すと，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

となる．ところが，相対論において，ハミルトニアンは，システム全体の 4 元運動量 P_μ の第 0 成分 P_0 である．したがって，全ての成分に関する次のようなシュレディンガー方程式を書けば，相対論と整合的な形式になる．

$$i\hbar\partial_\mu\Psi = \hat{P}_\mu\Psi$$

量子力学（粒子の量子論）におけるシュレディンガー方程式が非相対論的なのは，ハミルトニアンとして非相対論的なエネルギー関数を使うからである．

デコヒーレンス解釈を宇宙全体に適用すると，宇宙は，過去から未来にわたる 1 つの量子過程となる．その時間的な端は，第 6 章で説明した波動関数の境界条件を全自由度に拡張した形になっているかもしれないし，そうでないかもしれない．未来に何が起きるかは量子過程の中で決まっているので一種の決定論とも言えるが，ある時刻の状態が物理法則によって他の時刻の状態を完全に規定する訳ではなく，通常の意味での決定論（法則的決定論）は成り立っていない．一方，多世界解釈では，全ての世界をあわせると厳密な方程式に従っているので，法則的決定論が成立する．この場合，ある瞬間の状態によって他の時刻の状態も決まってしまうので，なぜ時間軸という無駄な拡がりがあるのかが不思議になる．

(2) 非還元性　デコヒーレンス解釈は，無数の世界が併存する多世界解釈に比べると，奇抜さに欠けるように思えるかもしれない．巨視的に見ると，物理現象の大部分はニュートン力学とマクスウェル電磁気学に従って生起しており，まるで時計仕掛けである．しかし，こうした機械的な世界像は，世界を粗視化したときにしか通用しない．

量子宇宙論では，「何もない空間を飛び回る粒子」という描像は否定され，あらゆる物理現象は，量子場が励起される過程と見なされる（量子重力理論は完成していないが，重力も同様だと考える）．時間と空間をあわせた座標 x で指定される場所での場を $\phi(x)$ と表すと，$\phi(x)$ は確定した値を取らず，量子揺らぎという形でさまざまな値に拡がっている．そこで，この $\phi(x)$ を，拡がりを持つ次元としてイメージしていただきたい．数学的に定式化するならばヒルベルト空間として扱わなければならないが，ここでは，も

う少し素朴に，その中を経路積分の経路が通る拡がりと見なしてかまわないだろう．そうすると，世界は，x で指定される場所の数（に量子場の種類の数を掛けたもの）だけ次元のある超多次元空間として表される．物理現象は，この超多次元空間に生じる．

物理学に対する批判として，「要素還元主義的だ」というものがある．確かに，もし世界がニュートン力学に従う粒子で構成されているならば，生命を含めてあらゆる現象が粒子の運動に還元されることになり，どうにも納得できない．しかし，量子論にこの批判は当てはまらない．なぜなら，超多次元空間に生起する現象は，要素に還元できないからである．

量子場で議論すると話が難しくなりすぎるので，粒子の量子論を例にして説明しよう．

まず，水素分子 $\mathrm{H_2}$ において，陽子の間隔が R であるという状態を考える．陽子をニュートン力学における粒子と同様に見なすならば，この状態は，「それぞれの陽子の位置の間隔が R である」という形で要素に還元することができる．ところが，量子論における状態は，そうなってはいない．2 原子分子に関する一般的な扱いに従って，それぞれの陽子の空間的な位置座標を $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ とし，陽子間隔が $r = |\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$ のときの 2 電子状態の基底エネルギーを使って，分子エネルギー $U(r)$ を求めてみよう．このとき，2 個の陽子の波動関数 $\Psi(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ を変数分離法で計算すると，r に依存する因子が $\varphi(r)$ という形で得られる．分子エネルギー $U(r)$ が $r = R$ で極小値を取る場合，$\varphi(r)$ はその近傍にピークを持つことになる．

ここで気をつけなければいけないのは，r が座標空間で測った距離ではなく，陽子の位置という量子論的な自由度の間隔だという点である．位置は 3 つの成分を持つので，2 個の陽子の波動関数は，$2 \times 3 = 6$ 次元空間の内部で表される．陽子の間隔が R であるという状態は，6 次元空間内部で波動関数が $r = R$ にピークを持つことであり，縦・横・高さを持つ 3 次元空間の内部に並んで置かれた 2 つの粒子の位置関係に還元することはできない．さらに言えば，陽子はクォークとグルーオンの束縛状態なので，2 個の陽子の位置は，もともと，クォーク場とグルーオン場の集団運動を近似的に表す代表座標であり，それぞれの場の自由度が張る超多次元空間で定義されるはずである．したがって，水素分子の陽子間隔が R だという状態も，超多次元空間内部の状態を近似的に表したものだと考えられる．

こうした見方は，より複雑な状態にも適用できる．例えば，ベンゼン環が正六角形だという状態は，粒子の量子論で言うと，6 個の炭素イオンの位置を表す 18 次元空間での波動関数が，正六角形を表す地点でピークを持つことである．原子が幾何学的に配列されるという複雑な性質が，波動関数のピークとして単純に実現されており，要素還元が可能な原子論的な世界とは様相を異にする．われわれの周囲に見られる秩序構造の大半は，量子論的な相互作用に起因しており，量子論的な自由度が張る空間内部で形成され

る状態として実現される．

量子宇宙とは，こうした状態を全て含むものである．巨視的には古典論で近似できるからと言って，デカルトが思い描いたような時計仕掛けではない．それ自体が，きわめて深遠な世界なのである．

参考文献

学部レベルでも読むことのできる現代的な宇宙論の参考書には，次のようなものがある．

[1]　松原隆彦著『現代宇宙論——時空と物質の共進化』（東京大学出版会）
[2]　佐藤勝彦・二間瀬敏史編『宇宙論 I——宇宙のはじまり（シリーズ現代の天文学 2)』（日本評論社）
[3]　二間瀬敏史ほか編『宇宙論 II——宇宙の進化（シリーズ現代の天文学 3)』（日本評論社）

本書では歴史的な業績についても随所で触れておいたが，インフレーション理論が登場する以前の主要論文は，次の論文集にほぼ網羅されている．

[4]　O. Gingerich and K. Lang, *Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975* (Harvard University Press)

第1章／第2章

一般相対論と量子場理論に関しては，次のような参考書がある．

[5]　ジェームズ・B. ハートル著『重力——アインシュタインの一般相対性理論入門』（ピアソンエデュケーション）
[6]　V. P. ナイア著『現代的な視点からの場の量子論　基礎編』（丸善出版）

第3章

インフレーション理論の基本的なメカニズムや，平坦性問題・地平線問題の解決は，前出 [1][2] に解説されている．さまざまな観測データは，ネットで入手することができ

る．例えば，WMAP のデータは，次のページに掲載されている．

[7] “WMAP Wilkinson Microwave Anisotropy Probe” (http://map.gsfc.nasa.gov/)

第5章

第 2 の加速膨張が発見された経緯は，次の本に詳しい．

[8] リチャード・パネク著『4% の宇宙——宇宙の 96% を支配する “見えない物質” と “見えないエネルギー” の正体に迫る』(ソフトバンククリエイティブ)

第6章

ホイーラー－ドウィット方程式について解説している読みやすい参考書は，ほとんど見あたらない．「無からの創造」については，ヴィレンキンの原論文が最も刺激的だろう．

[9] A. Vilenkin, “Creation of Universes from Nothing” (*Phys. Lett.* 117B (1982) 25)

第7章

特異点定理に関しては，本文中で紹介した Hawking-Ellis の著書がスタンダードだが，専門家向けの本で難解である．次の論文の方が，まだわかりやすい（それでも，大学院レベルの内容だが).

[10] R. Geroch and G. T. Horowitz, “Global Structure of Spacetimes,” in *General Relativity: an Einstein Centenary Survey* (ed. by S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press)

ループ量子重力理論や力学的単体分割理論の宇宙論については，ネット上にいくつも解説がある．

[11] M. Bojowald, “Loop Quantum Cosmology” (*Living Rev. Relativity* 11 (2008) 4; http://www.livingreviews.org/lrr-2008-4)

[12] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz and R. Loll, “Reconstructing the Universe” (*Phys. Rev.* D72 (2005) 064014; arXiv: hep-th/0505154 v2 6 Jun 2005)

※arXiv とはインターネットで閲読できる論文の保管サイトで，arXiv: ～で検索すれば簡単に見つけられる．

第8章

カオス的インフレーションについての解説としては，次のものが比較的わかりやすいだろう．

[13] A. H. Guth, “Eternal inflation and its implications” (*J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007) 6811; arXiv:hep-th/0702178 v1 22 Feb 2007)

ブレイン宇宙論・エキピロティック宇宙論に関しては，理論の提唱者が一般人向けの解説書を執筆している．

[14] リサ・ランドール著『ワープする宇宙——5次元時空の謎を解く』（日本放送出版協会）

[15] ポール・J. スタインハート，ニール・トゥロック著『サイクリック宇宙論——ビッグバン・モデルを超える究極の理論』（早川書房）

サイクリック宇宙論とは，本書で紹介したエキピロティック宇宙論をさらに発展させたものである．オリジナルのエキピロティック宇宙論に関しては，原論文が面白い．

[16] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, “The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang” (*Phys. Rev.* D64 (2001) 123522; arXiv:hep-th/0103239 v3 15 Aug 2001)

第9章

並行宇宙に関しては，本文中にも記したグリーンの『隠れていた宇宙』がわかりやすいが，多世界解釈などに関しては，本書と立場を異にしている．

第10章

並行宇宙と人間原理については，多くの物理学者が言及している．1つだけ例を挙げよう．

[17] A. Linde, "Inflation, Quantum Cosmology and the Anthropic Principle" (arXiv: hep-th/0211048v2 8 Nov 2002)

弱い相互作用のない宇宙について詳しく考察したのは，次の論文で，数式が少なく，専門家でなくても充分に理解できて面白い．

[18] R. Harnik, G. D. Kribs, and G. Perez, "A universe without weak interactions" (*Phys. Rev.* D74 (2006) 035006; arXiv:hep-ph/0604027v1 4 Apr 2006)

宇宙定数問題に関しては，ワインバーグの論文が基本文献である（専門家向けだが，学生にも読めないことはない）．

[19] S. Weinberg, "Anthropic Bound on the Cosmological Constant" (*Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2607)

天体が形成される条件を求める際に引用したピーブルスの論文は，次のものである．

[20] P. J. E. Peebles, "The Gravitational Instability of the Universe" (*Astrophys. J.* 147 (1967) 859; http://adsabs.harvard.edu/full/1967ApJ...147..859P)

3次元空間だけが膨張するという超ひも理論の論文も，ネット上で読める（専門家にしか理解できない内容だが）．

[21] S. W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, "Expanding (3+1)-dimensional universe from a Lorentzian matrix model for superstring theory in (9+1)-dimensions" (*Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 011601; arXiv:hep-th/1108.1540 v3 4 Mar 2012)

第11章

デコヒーレンス解釈に関しては，まだ論者によって意見の分かれるところがある．次の解説は，1つの考え方を提示したものである．

[22] W. H. Zurek, “Decoherence and the Transition from Quantum to Classical—Revisited” (arXiv:quant-ph/0306072)

より深く勉強したい人のために，デコヒーレンス（および関連する話題）についての総括的な文献として，オムネスの長大な論文を挙げておこう．

[23] R. Omnes, “From Hilbert Space to Common Sense: A Synthesis of Recent Progress in the Interpretation of Quantum Mechanics” (*Ann. of Phys.* 201 (1990) 354)

二重スリット実験を解析したウータース－ズレクの論文は，次のものである．

[24] W. K. Wooters and W. H. Zurek, “Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr’s principle” (*Phys. Rev.* D19 (1979) 473; http://prd.aps.org/abstract/PRD/v19/i2/p473_1)

原子を用いて光子を散乱させる二重スリット実験，原子の集団運動によって「シュレディンガーの猫」状態を実現した実験の論文は，それぞれ次の通り．

[25] U. Eichmann et al., “Young’s Interference Experiment with Light Scattered from Two Atoms” (*Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 2359)

[26] C. Monroe et al., “A ‘Schrodinger Cat’ Superposition State of an Atom” (*Science* 272 (1996) 1131; http://tf.nist.gov/general/pdf/1112.pdf)

なお，これらの実験を主導したワインランドは，2012年にノーベル物理学賞を受賞している．

索引

は行

ま行

や・ら・わ行

著者紹介

吉田伸夫

1956年，三重県生まれ．東京大学理学部物理学科卒業，同大学院博士課程修了．理学博士．専攻は素粒子論（量子色力学）．東海大学，明海大学で非常勤講師を務めながら，科学哲学や科学史をはじめ幅広い分野で研究を行っている（ホームページ『科学と技術の諸相』参照．http://www005.upp.so-net.ne.jp/yoshida_n/）．著書に『思考の飛躍』『光の場，電子の海』『宇宙に果てはあるか』（以上，新潮選書），『日本人とナノエレクトロニクス』（技術評論社），『明解 量子重力理論入門』（講談社）などがある．

NDC421　267p　21cm

明解　量子宇宙論入門

2013年3月30日　第1刷発行
2014年7月10日　第3刷発行

著　者　吉田伸夫
発行者　鈴木　哲
発行所　株式会社講談社
〒112-8001　東京都文京区音羽2-12-21
販売部　(03) 5395-3622
業務部　(03) 5395-3615
編　集　株式会社講談社サイエンティフィク
代表　矢吹俊吉
〒162-0825　東京都新宿区神楽坂2-14　ノービィビル
編集部　(03) 3235-3701
印刷所　株式会社平河工業社
製本所　株式会社国宝社

「明解」は，株式会社三省堂の登録商標です．

落丁本・乱丁本は，購入書店名を明記のうえ，講談社業務部宛にお送りください．送料小社負担でお取り替えいたします．なお，この本の内容についてのお問い合わせは講談社サイエンティフィク編集部宛にお願いいたします．定価はカバーに表示してあります．

Printed in Japan

ISBN 978-4-06-153285-4